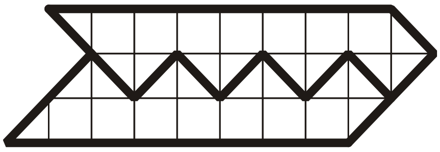
Зимний тур XXXV Турнира Архимеда
Условия и решения задач

В задачах 1.1.-1.3. укажите ответ (в виде числа, рисунка и т.д.). Обоснования писать не требуется.

ЗАДАЧА 1.1. (5 баллов) Дан многоугольник (см. рис. слева), вырезанный из картона, и показано, как его разрезать на два одинаковых шестиугольника (см. рис. справа).

Разрежьте данный многоугольник на два одинаковых десятиугольника.
(Одинаковые фигуры совпадают при наложении, при этом их можно поворачивать и переворачивать).

Решение: см. рис.



Комментарии Жюри:
- ✓ Верный рисунок — 5 баллов.
- ✓ Верный рисунок (не выделен среди неверных) — 4 балла.
- ✓ Выделен неверный рисунок, но имеется верный рисунок — 4 балла.

ЗАДАЧА 1.2. (5 баллов) Новогодняя гирлянда состоит из шаров двух цветов — красных и синих (оба цвета присутствуют). Известно:

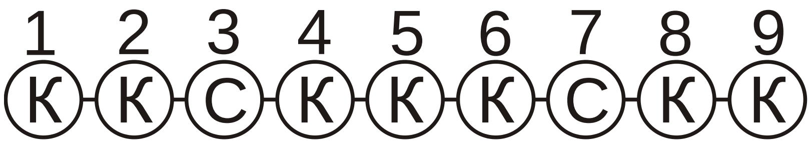
1) если между двумя какими-нибудь шарами расположены ровно три шара, то эти два шара одного цвета;

2) если между двумя какими-нибудь шарами расположены ровно шесть шаров, то эти два шара одного цвета.

Какое наибольшее количество шаров может быть в такой гирлянде?

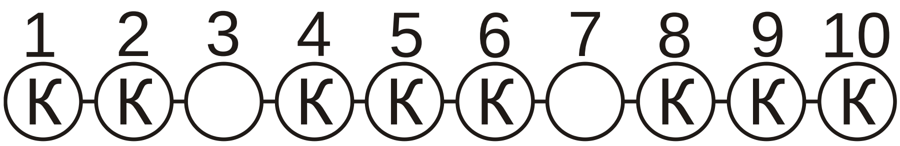
Приведите пример самой длинной гирлянды, удовлетворяющей условию задачи (цвета обозначьте буквами: К — красный, С — синий).

Ответ: 9 шаров, пример см. рис.



Решение (от участников не требовалось).

Докажем, что десять и более шаров быть не может. Пусть шаров десять.
Пары шаров «через три»:
Красный цвет: (1;5), (5;9), Итого: 1, 5, 9.
Пары шаров «через шесть» (1;8), (2;9). Итого: 1, 2, 5, 8, 9.
Пары шаров «через три» (4;8) и (2;6), (6;10). Итого: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10
Пока все однозначно, далее – возможны варианты.



1) если 3-й шар того же цвета, то того же цвета 7 шар — противоречие, так как все шары не могут быть одного цвета.

2) если 3-й шар другого цвета, то и шары 7 (шары шаров «через три») и 10 (пара шаров «через шесть») другого цвета — противоречие, так как 6 и 10 шары должны быть одного цвета.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
К	К	С	К	К	К	С	К	К	С

Комментарии Жюри:

✓ Верный ответ + верный рисунок — 5 баллов

✓ Только ответ «9» без примера ИЛИ ответ «9» с неверным примером — 1 балл.

✓ Верный пример, а «9» отсутствует или неверное — 4 балла.

ЗАДАЧА 1.3. (5 баллов) Репортаж из будущего. Скоростной поезд Москва-Краснодар отходит, когда на дисплее вагонных часов ровно 10:25. На маршруте три остановки (считая конечную). Алиса знает, что до момента первой остановки (и вообще между моментами остановок) проходит не менее двух с половиной часов, но не более семи. При этом в момент каждой остановки поезда она увидит на дисплее те же цифры, что и в Москве, но только одну из них на том же месте, что и на предыдущей станции. Укажите время прибытия поезда в Краснодар и на каждую из промежуточных остановок (перечислите все возможные варианты).

Ответы: поезд прибудет на 1-ю остановку — в 15:02, на 2-ю — в 21:05, в Краснодар — в 01:52 или 02:15.

Решение (от участников не требовалось).

Из 0, 1, 2 и 5 можно составить 10:52, 12:05, 12:50, 15:02, 15:20, 20:15, 20:51, 21:05, 21:50, 01:25, 01:52, 02:15, 02:51, 05:12, 05:21.

1) 1-я остановка не могла быть в 12:05 или 12:50 (т.к. интервал после 10:25 менее 2,5 часов) и после 15:20 (т.к. интервал будет более 7 часов).

Т.е. 1-я остановка может быть в 15:?. Но в 15:20 будут повторяться 2 цифры на тех же местах, что и в 10:25. Значит, 1-я остановка могла быть только в **15:02**.

2) Остаются: 20:15, 20:51, 21:05, 21:50, 01:25, 01:52, 02:15, 02:51, 05:12, 05:21.

2-я остановка могла быть только в 20:15, 20:51, 21:05, 21:50 (иначе интервал будет более 7 часов), но при 20:15, 20:51, 21:50 нет повторяющихся цифр на тех же местах, что и в 15:02. Следовательно, 2-я остановка может быть только в **21:05**.

3) Остаются: 01:25, 01:52, 02:15, 02:51, 05:12, 05:21.

05:12, 05:21 - не подходят, т.к. интервал после 2-й остановки будет более 7 ч.

Из оставшихся значений часов 01:25, 01:52, 02:15, 02:51 условию удовлетворяют два: **01:52** и **02:15** (в 01:25 будет 2 повторяющихся цифры на тех же местах, что и в 21:05, а в 02:51 все цифры на других местах).

Таким образом, поезд прибудет на 1-ю остановку — в 15:02, на 2-ю — в 21:05, в Краснодар — в 01:52 или 02:15.

Комментарии Жюри:

✓ **ВАЖНО:** верный переход от верного времени к верному

✓ Есть только две верные строчки или только они выделены среди других — 5 баллов.

✓ Только одна верная строчка или только она выделена среди неверных — 3 балла.

Если нет ни одной полной верной строчки:

✓ 15:02, 21:05, Неверное время — 2 балла

✓ 15:02, Неверное время, Любое время — 1 балл

✓ Неверное время, 21:05, 01:52 ИЛИ Неверное время, 21:05, 02:15 — 1 балл (если обе вариации есть и выделены только они, то 2 балла, иначе – 1 балл)

- ✓ Если среди верных или частично верных строчек имеются неверные — минус 1 балл от общей набранной суммы.
- ✓ 10:25, 15:02, 21:05 (если Москву считали первой остановкой, что не так по тексту) — 1 балл.

В задачах 2.1.–2.5. требуется привести полное решение с обоснованием.

ЗАДАЧА 2.1. (7 баллов) В турнире по теннису (каждый играет со всеми участниками по одной партии) участвовали 10 игроков. В каждом матче судьей был один из других участников. **а)** Могло ли оказаться, что все участники судили одинаковое число матчей? **б)** Изменится ли ответ в задаче, если в турнире примет участие 9 игроков? Все ответы требуется обосновать (если ответ «да» — приведите пример подходящего расписания, если ответ«нет» — объясните почему).

Ответ: а) нет; б) да.

Решение.

а) Предположим, что могло. Тогда общее количество партий: $\frac{10\times 9}{2}=45$, что не делится нацело на 10. Следовательно, такого оказаться не могло.

б) общее количество партий: $\frac{9\times 8}{2}=36=4\times 9$.

Составим пример расписания судейства. Ключ к составлению данного расписания: сложение номеров игроков по $\bmod 9$ (остаток при делении на 9). Например, если играют игроки 6 и 7: $6+7\equiv 4(\bmod 9)$ (остаток при делении 13 на 9 равен 4). То есть матч 6 и 7 участников судит 4 участник и т.д. Это будет справедливо для всех игр между игроками от 1 до 8. Для игр *N*-го игрока с 9-м игроком номер судьи определяем по отсутствующему номеру ранее судивших *N*-го игрока (расписание – см. таблицу).

Игроки	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
1	×××	3	4	5	6	7	8	9	2
2	3	×××	5	6	7	8	9	1	4
3	4	5	×××	7	8	9	1	2	6
4	5	6	7	×××	9	1	2	3	8
5	6	7	8	9	×××	2	3	4	1
6	7	8	9	1	2	×××	4	5	3
7	8	9	1	2	3	4	×××	6	5
8	9	1	2	3	4	5	6	×××	7
9	2	4	6	8	1	3	5	7	×××

Примечание: Возможны другие варианты составления расписания.
Можно представить расписание также в виде графа или иным способом.

Комментарии Жюри:
- ✓ Верный ответ с обоснованием в пункте а) — **3 балла**.
- ✓ В пункте б) Верный ответ с указанным примером расписания — **4 балла**.
- ✓ В пункте б) отсутствие примера полного расписания — **0 баллов**.
- ✓ Только верный ответ на любой пункт — **0 баллов**.

Не редко при составлении расписания в пункте б) допускались ошибки, когда кто-то судил матч с самим собой или менее/более 4 раз — такое расписание не засчитывалось.

ЗАДАЧА 2.2. (7 баллов) Кабинки на колесе обозрения расположены через одинаковые промежутки и пронумерованы по порядку (начиная с №1). Колесо вращается равномерно и каждую минуту в верхней точке оказывается новая кабинка. Первый раз Вася увидел там кабинку №6, а через 25 минут — №8. Сколько всего кабинок могло быть на колесе обозрения? Укажите все варианты. Ответ обоснуйте.

Ответ: 9, 23 или 27.

Решение 1.

Заметим, что номер кабинки в верхней точки стал другим (при этом сменилось 25 кабинок). Значит, число кругов было не полным (возможно было менее одного круга).

Колесо могло крутиться как по часовой, так и против часовой стрелки (см. таблицу).

В таблице показано, на какой минуте какая кабинка была на какой минуте движения колеса.

По часовой стрелке		**Против часовой стрелке**	
-2 мин	*№4*	**-2 мин**	*№8*
-1 мин	*№5*	**-1 мин**	*№7*
0 мин	*№6*	**0 мин**	*№6*
1 мин	*№7*	**1 мин**	*№5*
2 мин	*№8*	**2 мин**	*№4*
23 мин - круг		*27 мин - круг*	
25 мин	*№8*	**25 мин**	*№8*

Между появлениями в верхней точке кабинки №8 проходит **целое** количество кругов; это количество минут должно делиться на количество кабинок в колесе обозрения. При этом кабинок не меньше 8.

Из таблицы следует, что:

- если кабинок 23, то 1 полный оборот (несколько полных оборотов быть не может, т.к. 23 не имеет делителей).
- если кабинок 9 (3 полных оборота).
- если кабинок 27 (1 полный оборот).

Таким образом, возможны 3 случая: 9, 23, 27 кабинок.

Решение 2.

В зависимости от того, в какую сторону идет нумерация на колесе, кабинка №8 либо появилась через 2 минуты после №6, либо за 2 минуты до.

Между появлениями в верхней точке кабинки №8 проходит **целое** количество кругов, значит, это количество минут должно делиться на количество кабинок в колесе обозрения. В первом случае между ними проходит 23 минуты. Во втором — 27 минут.

23 делится только на 23 и 1. Кабинок не меньше 8, значит, только 23 кабинки.

27 делится только на 1, 3, 9, 27. Кабинок не меньше 8, потому 9 и 27 подходят.

Комментарии Жюри:

Полное решение — 7 баллов.

Если в решении рассматривается движение <u>в обе стороны</u>:

- ✓ Полное решение, но не отброшен вариант 3 кабинки (ответ 3, 9, 23, 27) — **5 баллов**.
- ✓ Решение, в котором колесо проходит <u>один круг,</u> рассмотрены <u>оба</u> направления движения, получены ответы <u>23 и 27</u> (потерян ответ 9 кабинок) — **4 балла**.

Если в решении рассматривается движение <u>только в одну сторону</u>:

- ✓ Полностью рассмотрен случай с ответом 9 и 27 — **4 балла**.
- ✓ Полностью рассмотрен случай с ответом 23 — **3 балла**.
- ✓ Такое же решение, но ответ 3 не отброшен (ответ 3, 9, 27) — **2 балла**.
- ✓ При наличии только ответов — каждый верный ответ **— 1 балл.**
- ✓ При наличии неверных ответов — **минус 1 балл** за все неправильные ответы.

ЗАДАЧА 2.3. (7 баллов) Трудный случай. На острове живут рыцари (всегда говорят правду) и лжецы (всегда лгут). Началась эпидемия, которая меняет поведение заболевшего: больной рыцарь всегда лжёт, а больной лжец говорит правду.

Больные лжецы выздоравливают сами. Больного рыцаря может спасти только новое лекарство, которое смертельно опасно для всех остальных жителей острова.

Два жителя острова, Альфа и Бета, обладают правдивой информацией друг о друге, но говорят ли они правду — зависит от диагноза.

Альфа говорит: «Мы оба рыцари и оба больны».

Бета говорит: «По крайней мере, один из нас — здоровый лжец».

Кому из двух жителей острова следует дать лекарство? Кому точно его давать нельзя?

Ответ: лекарство давать никому нельзя.

ВАЖНО: Про каждого человека острова нужно знать — можно ему давать лекарство или нельзя.

Решение 1.

Для удобства введем обозначения: ЗР и ЗЛ — здоровые рыцари и лжецы соответственно, БР и БЛ — больные рыцари и лжецы соответственно.

1. Альфа не может быть БЛ и ЗР, потому что его высказывание должно было быть правдиво, а это не так. Значит Альфа либо БР или ЗЛ.
2. Если Альфа — БР
   2.1. то Бета — не БР (чтобы высказывание Альфа было ложным).
   2.2. то Бета — не ЗЛ, иначе он сказал бы правду, а должен был солгать
   2.3. то Бета — не ЗР, иначе он солжет, а должен сказать правду
   Значит Альфа — ЗЛ.
3. Значит утверждение Бета верно и он – БЛ или ЗР.
4. Следовательно, БР среди них нет

Таким образом, лекарство никому из пациентов давать нельзя.

Решение 2.

Поскольку лекарство можно давать только БР, проверим, есть ли среди жителей БР.

1. Если Альфа — БР, то

1.1 Бета не может быть БР, потому что тогда высказывание Альфы было бы правдой, а правду БР сказать не может.

1.2 При этом Бета не может быть также ЗР, потому что тогда его высказывание «хотя бы один из нас ЗЛ» должно быть правдой, а это не так: ЗЛ в паре БР-ЗР нет.

1.3 Бета не может быть ЗЛ, потому что тогда его высказывание «хотя бы один из нас ЗЛ» должно быть ложью, а это правда для пары БР-ЗЛ.

1.4 Бета не может быть БЛ, потому что тогда его высказывание «хотя бы один из нас ЗЛ» должно быть правдой, а это не так: ЗЛ в паре БР-БЛ нет.

Следовательно, Альфа — не БР.

2. Рассмотрим случай, когда Альфа — не БР, а Бета — БР. Тогда высказывание Беты должно быть ложью и, следовательно, среди Альфы и Беты не должно быть ни одного ЗЛ. Но оставшиеся доступные персонажи (ЗР и БЛ) могут говорить только правду и значит не могут произнести высказывание «Мы оба рыцари и оба больны». Следовательно этот вариант также невозможен.

Таким образом, среди Альфы и Беты нет БР и лекарство никому из них давать нельзя.

Комментарии Жюри:

- ✓ Полное решение с верным обоснование — **7 баллов.**
- ✓ Последовательность верных утверждений касательно сущности жителей с неполным обоснованием — **4 балла.**
- ✓ Представлена частная ситуация, когда лекарство никому давать нельзя — **4 балла.**
- ✓ Ответ верный без обоснования или с логическими ошибками — **1 балл**
- ✓ Неверный ответ — **0 баллов.**

NB: Обращаем внимание, что ложное высказывание жителя Альфа может относиться как к обеим частям его высказывания, так и **отдельно только к любой одной из них, сохраняя истинность для второй части высказывания**.

Примеры распространенных логических ошибок:

1. Альфа не может говорить правду, значит, он точно ЗЛ.
2. Бета говорит правду, поэтому он точно ЗР.
3. Неверное построение отрицания к высказыванию Альфы и выводы из него, например: «Это неправда, поэтому они точно не рыцари и они точно не больны, значит, Альфа — здоровый лжец». Или «Это неправда, значит, они точно не больны, и лекарство им не нужно»

ЗАДАЧА 2.4. (7 баллов) Винни-Пух и Кролик вышли одновременно из своих домиков и направились навстречу друг другу по прямой дороге. Обычно они ходят с одинаковыми скоростями, но в этот раз Винни-Пух половину **времени** до встречи сочинял свои «шумелки-сопелки» и шел вдвое медленнее. Да и Кролик половину **пути** до места встречи думал «о положении земной оси» и тоже шел вдвое медленнее. После чего каждый из них, покончив с любимым делом, шел как обычно. Когда они встретились, оказалось, что один из них прошел на 80 метров больше, чем другой. Кто из них прошел большее расстояние, и как далеко их дома находятся друг от друга?

Ответ: а) Винни-Пух прошел большее расстояние, чем Кролик.
б) Расстояние между домиками — 1360 м.

Решение.

1) Винни-Пух и Кролик встретились, то есть они провели в пути (до встречи) одно и тоже время.
2) Кролик изменил свою скорость в середине пути, следовательно, «быструю» половину S своего маршрута он прошел в 2 раза быстрее за время t, чем «медленную» за $2t$. Итого Кролик прошел $2S$ за $3t$.
3) Винни-Пух «быструю» часть своего маршрута и «медленную» прошел за одно и тоже время $1{,}5t$, то есть «обычным» шагом он прошел в 1,5 большее расстояние, чем Кролик, — $1{,}5S$, а «медленная» часть пути Винни-Пух была в два раза меньше — $0{,}75S$. То есть Винни-Пух прошел $2{,}25S$, что на $2{,}25S - 2S = 0{,}25S$ больше, чем Кролик (см. таблицу).

	«Медленная» часть		«Быстрая» часть (обычно)		Итого	
	время	путь	время	путь	время	путь
Кролик	$2t$	S	t	S	$3t$	$2S$
Винни-Пух	$1{,}5t$	$0{,}75S$	$1{,}5t$	$1{,}5S$	$3t$	$2{,}25S$

Разность расстояний составляет $0{,}25S = 80$ м, откуда $S = 320$ м. Расстояние между домиков равно: $2S + 2{,}25S = 4{,}25S = 4{,}25 \cdot 320 = 1360$ м.

Комментарии Жюри:
- ✓ Полное решение — **7 баллов.**
- ✓ Верный ответ а) — **+1 балл** + Верные обоснования для а) — **+2 балла**.
- ✓ Верный ответ б) — **+1 балл** + Верные обоснования для б) — **+3 балла**.
- ✓ Решение верное, но допущена арифметическая ошибка (в конце) — **5 баллов**.
- ✓ Верный ответ в пункте а) с неверным обоснованием — **0 баллов**.

***Комментарий Жюри для решений пункта а)*:** были распространены неверные выводы о соотношении путей, пройденными Винни-Пухом и Кроликом, когда утверждалось (использовалось в расчетах), что за одно и тоже время они проходили одинаковые расстояния.

ЗАДАЧА 2.5. (7 баллов) Компьютерная игра. Дано выражение вида:

$$1 \otimes 2 \otimes 3 \otimes 4 \otimes 5 \otimes 6 \otimes 7 \otimes 8 \otimes 9 \otimes 10 \otimes 11 \otimes 12$$

В начале игры вместо каждого знака $\otimes$ на экране появляется случайным образом «плюс» или «минус».

За один ход можно одновременно поменять два знака, стоящие рядом с каким-нибудь числом, на противоположные. Требуется, сделав не более 12 ходов, получить пример с ответом, кратным 11. Всегда ли можно этого добиться? Если ответ «да», то опишите способ, если ответ «нет» — объясните почему.

Ответ: всегда.

Смысл решения — из любой комбинации знаков можно получить некоторое фиксированное положения, из которого мы можем получать требуемое.

Решение 1.

За не более, чем 10 ходов (последовательно меняя знаки на «+» у чисел 2, 3, ..., 11) можно получить следующий пример:

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11\otimes 12$$, где $\otimes = +$ *или* $-$.

1) Если знак $\otimes = +$, то выражение равно 78 и результат достигаем за два хода: меняем знаки у числа 2, а затем у числа 3:

11 ход: $1-2-3+4+5+6+7+8+9+10+11+12$.

12 ход: $1-2+3-4+5+6+7+8+9+10+11+12=66$.

66 кратно 11.

2) Если знак $\otimes = -$, то выражение равно 54, и еще одним ходом поменяем знаки у числа 2:

11 ход: $1-2-3+4+5+6+7+8+9+10+11-12=44$.

44 кратно 11.

Решение 2.

За 10 ходов перед 10-ю числами знаки сделаем как нужно (везде плюсы, а перед 6 — минус), а перед числом 11 знак не важен.

Сумма этих 11 чисел (без 11) будет 55:

$$1+2+3+4+5-6+7+8+9+10+12=55.$$

В зависимости от знака у 11 сумма будет либо $55-11=44$, либо $55+11=66$. Таким образом, 10 ходов достаточно для решения задачи.

Решение 3 («Взрослое» решение — участники его не предлагали).

Можно решить задачу и за 4 хода, рассматривая остатки от деления на 11 у 4-х чисел (например, у 7, 8, 9 и 10). Можно убедиться, что мы можем получить любой остаток от деления и в зависимости от суммы чисел остальных чисел, добиться нужной комбинации знаков у этих четырех за 4 хода. При этом знак у числа 11 не влияет на результат.

Возможны решения аналогичные решению 1, когда получаются другие фиксированные положения.

Примечание: Заметим, что замена знака плюс на минус у любого числа уменьшает общую сумму выражения на удвоенное значение этого (этих) чисел, т.е. максимальная сумма выражения (78) всегда уменьшается на четное число. Таким образом, можно получить только 3 числа кратных 11: 22, 44 и 66.

Комментарии Жюри:

- ✓ Приведен только верный пример с утверждением, что всегда можно получить — 0 баллов
- ✓ Обосновано, что за не более 10 ходов можно получить гарантировано все знаки одинаковыми, кроме одного — 3 балла
- ✓ Рассмотрение каждого случая четности знаков до выражения, кратного 11, за не более 12 ходов — +2 балла за каждый (4 балла за оба случая четности и нечетности знаков)