Зимний тур XXVIII Турнира Архимеда
Условия и решения задач

Задача 1 (3+3 балла). (Дроби) Дано выражение: $\dfrac{2019*217*20*19*8}{2018*101*20*18*11}$.

Можно ли вместо звёздочек поставить знаки «+» и «–» так, чтобы после вычислений получилось:

а) $\frac{7}{6}$; б) $\frac{11}{9}$? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему.

Ответ: а) да б) нет

Решение.

а) Пример.

$$\frac{2019*217*20*19*8}{2018*101*20*18*11}=\frac{2019+217-20-19+8}{2018-101-20-18+11}=\frac{2205}{1890}=\frac{7\cdot 315}{6\cdot 315}=\frac{7}{6}.$$

Комментарий Жюри:

За верный ответ без примера баллы не ставились.

б) Решение 1.

Пусть $a=2019*217*20*19*8$, тогда a нечётно, $b=2018*101*20*18*11$, тогда b чётно. Если $\frac{a}{b}=\frac{11}{9}$, то $11b=9a$, число слева – чётное, а справа – нет. Противоречие.

Решение 2.

Наибольшее значение дроби (при всех плюсах в числителе и всех минусах в знаменателе) меньше $\frac{11}{9}$.

Действительно, $\dfrac{2019+217+20+19+8}{2018-101-20-18-11}=\dfrac{2283}{1868}<\dfrac{11}{9}$, т.к. $2283\cdot 9=20547$, а $1868\cdot 11=20548$.

Комментарий Жюри:

1. За верный ответ без объяснения или неверным объяснением баллы не ставились.

2. Многие участники пытались доказывать через остатки от деления числителя и знаменателя на 11 и 9 соответственно. Это неверно, т.к. по отдельности числитель и знаменатель могут быть кратны 11 и 9 соответственно.

Задача 2 (6 баллов). (Старинная задача) Два пеших посыльных отправились из штаба армии в дальние гарнизоны с пакетами: один – на юг, а другой – через 15 мин после первого – на север. Еще через 15 мин начальник штаба понял, что забыл вложить в пакеты письма и послал велосипедиста исправить ошибку. Догнав посыльного, велосипедист мгновенно передаёт письмо, мгновенно разворачивается и едет обратно. Скорости посыльных постоянны и равны, а скорость велосипедиста в 2 раза больше. Через какое наименьшее время велосипедист может выполнить приказ и вернуться в штаб?

Ответ: через 2 часа 30 минут.

Решение.

Заметим, что догонять стоит сначала ближнего посыльного.

Действительно, разобьём наш путь на две части: до встречи с кем-то из посыльных и после. Так как скорости посыльных равны, то время, потраченное на вторую часть пути, зависит только от расстояния между путниками в начале второй части пути. Если мы поедем сначала за дальним, то и ехать за ним мы будем дольше, и расстояние между посыльными будет больше, чем если бы велосипедист ехал за ближним.

Решение 1

Будем считать, что первый посыльный стартовал в 9:00, тогда второй в 9:15.

1) Велосипедист стартует в 9:30, догоняет стартовавшего в 9:15 посыльного в 9:45 (проехав за 15 мин расстояние, которое посыльный проходит за 30 мин), забирает пакет, разворачивается и едет к стартовавшему в 9:00 посыльному.

2) В 9:45 расстояние между велосипедистом и первым посыльным такое, которое посыльный проходит за 75 мин, и поэтому велосипедист догонит посыльного как раз за 75 минут, в 11.00.

3) В штаб он вернётся ещё через час – в 12:00, поэтому выполнит задание за 2 часа 30 минут.

Решение 2.

Подсчитаем время, которое нам при этом понадобится. Пусть за 15 минут посыльные проходят по x км.

Догоняем второго за 15 минут. Находимся в $2x$ км от штаба. Первый посыльный находится в $3x$ км от штаба в другую сторону. Тогда нам понадобится еще $5 \cdot 15$ минут, чтобы догнать его. Догоним его через $15 + 5 \cdot 15 = 90$ (мин) или 1,5 часа после старта. Для возвращения в штаб потребуется проехать путь $8x$, т.е. потратим на это 1 час, и тем самым вернёмся через 2 ч 30 мин после старта.

Комментарий Жюри:

1. При отсутствии обоснования наименьшего времени (т.е. велосипедист поехал за ближайшим, но не объяснено почему) ставилось не более 4 баллов.

2. При наличии вычислительных ошибок – ставилось не более 3 баллов.

Задача 3 (7 баллов). (Гномы и эльфы) В каждой чёрной клетке на клетчатом поле 6×6 (см. рис.) живёт гном, в каждой белой – эльф. Во вторник у каждого из них было не менее одной монеты. В среду каждый эльф дал каждому своему соседу-гному столько монет, сколько у этого гнома было во вторник. В пятницу каждый гном дал каждому своему соседу-эльфу столько монет, сколько у этого эльфа было в четверг. В другие дни монеты не передавались. Могло ли оказаться, что после этого у каждого эльфа и каждого гнома стало столько же монет, сколько было во вторник? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему.

Ответ: Да, могло.

Решение 1 (текст).

Пусть во вторник у каждого гнома 1 монета, а у каждого эльфа на 1 монету больше, чем число его соседей-гномов.

В среду каждый эльф раздаёт соседям-гномам по 1 монете и остаётся сам с 1 монетой.

В пятницу ему каждый из гномов вернёт по 1 монете. У каждого эльфа число монет осталось прежним. И у каждого гнома число монет осталось прежним.

Решение 2 (таблицы по состоянию на вторник, среду и пятницу)

ВТОРНИК

1	4	1	4	1	3
4	1	5	1	5	1
1	5	1	5	1	4
4	1	5	1	5	1
1	5	1	5	1	4
3	1	4	1	4	1

СРЕДА

3	1	4	1	4	1
1	5	1	5	1	4
4	1	5	1	5	1
1	5	1	5	1	4
4	1	5	1	5	1
1	4	1	4	1	3

ПЯТНИЦА

1	4	1	4	1	3
4	1	5	1	5	1
1	5	1	5	1	4
4	1	5	1	5	1
1	5	1	5	1	4
3	1	4	1	4	1

Комментарий Жюри:

1. За ответ без объяснений баллы не ставились.

2. Если в ответе описана только верная ситуация во вторник, а ситуации в среду и пятницу не описаны – ставилось 6 баллов.

Задача 4 (6 баллов). (Марафон) На острове рыцарей и лжецов прошёл марафонский забег. После забега каждому жителю острова задали 2 вопроса: «Участвовали ли Вы в забеге?» и «Добежали ли Вы до финиша?». Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а на вопросы отвечали «Да» или «Нет». На первый вопрос 50% опрошенных ответили «Да». На второй вопрос 45% опрошенных ответили «Нет». Кого среди участников забега, не добежавших до финиша, больше: рыцарей или лжецов?

Ответ: лжецов.

Решение 1.

Выясним, кто из опрошенных ответил на второй вопрос иначе, чем на первый.

1) Рыцари, которые участвовали в забеге, но до финиша не добежали, вместо «да» ответили «нет».

2) Лжецы, которые участвовали в забеге, но до финиша не добежали, вместо «нет» ответили «да».

Т.к. процент ответивших «да» вырос, то лжецов, которые участвовали в забеге, но не финишировали – больше.

Решение 2.

Введём неизвестные:

	Не участвовали	Участвовали, но не добежали	Участвовали и добежали
Рыцари	x	m	a
Лжецы	y	n	b

Ответят, что участвовали в забеге, $y+m+a$, и это половина всех жителей острова.

Ответят, что смогли добежать до финиша, $y+n+a$. Т.к. это больше половины всех жителей острова, а $y+m+a$ половина жителей, то $y+n+a>y+m+a$, откуда $n>m$.

Решение 3.

50% опрошенных, которые сказали, что участвовали в забеге – это рыцари, участвовавшие в забеге (пусть их a) и лжецы, которые не участвовали (пусть их d). Тогда $a+d=50$.

Кто на второй вопрос ответил не так, как на первый?

1) Те рыцари, которые участвовали в забеге и не финишировали. Если их x, то количество «да» уменьшится – вместо a станет $a-x$.

2) Те лжецы, которые участвовали в забеге и не финишировали. Если их t, то количество «да» увеличится – вместо d станет $d+t$.

Комментарий Жюри:

1. За ответ без объяснений баллы не ставились.

2. За неверное обоснование баллы не ставились.

Задача 5 (7 баллов). (Крестики-нолики) Требуется расставить в квадратной таблице 6×6 крестики и нолики так, чтобы внутри любого квадрата 3×3 крестиков было больше, чем ноликов, а внутри любого квадрата 5×5 ноликов было больше, чем крестиков. Возможно ли это? Если да, приведите пример, если нет, объясните почему.

Ответ: возможно.

Решение: Пример.

X	0	X	X	0	X
0	0	X	0	0	X
X	0	X	X	0	X
X	0	X	X	0	X
X	0	0	X	0	0
X	0	X	X	0	X

Задача 6 (7 баллов). (Мешки с алмазами) На лавке стоят два пустых мешка: чёрный и белый и лежит много мелких алмазов. Кощей Бессмертный и Баба-Яга играют в игру**:** по очереди кладут алмазы в мешки. Кощей каждым своим ходом имеет право положить либо два алмаза в белый мешок, либо один − в чёрный, а Баба-Яга − либо два алмаза в чёрный мешок, либо один − в белый. Начинает Кощей. Побеждает тот, после хода которого в каком-нибудь мешке окажется больше 2019 алмазов. Кто может гарантированно победить и как для этого нужно играть?

Ответ: Баба Яга.

Решение.

Стратегия:

1) Вначале Баба Яга копирует ходы Кощея.

Количество алмазов в мешках будет увеличиваться или на 1, или на 2 и при этом алмазов в каждом мешке будет после хода Бабы Яги поровну.

Если выбрать любые два последовательных натуральных числа, то поскольку количество алмазов в мешках увеличивается либо на 1, либо на 2, то в какой-то момент оно обязательно станет равным одному из этих выбранных чисел.

(Геометрически: если выкрасить две соседние целые точки на прямой и идти по целым точкам этой прямой с шагом 1 или 2, то обязательно попадёшь в одну из выкрашенных точек).

Возьмём в качестве этих двух последовательных натуральных чисел 2014 и 2015.

Как только количество алмазов в мешках станет равным одному из этих чисел, стратегия Бабы Яги меняется.

(А) Если алмазов станет по 2014, то Баба Яга дополняет ходы Кощея до 3 (если он положит в какой-то мешок 1 алмаз, то она 2, а если он 2, то она 1). Так после ходов Бабы Яги в мешках может быть 2017 алмазов, а затем 2020 алмазов – и она победила.

(Б) Если алмазов станет по 2015, то события могут разворачиваться по двум вариантам:

– если Кощей положит 2 алмаза в белый мешок, то Баба Яга положит 2 в чёрный, алмазов станет по 2017 и, в какой бы мешок Кощей ни пошёл, Баба Яга дополнит его ход до 2020 и выиграет.

– если Кощей положит 1 алмаз в чёрный мешок, то Баба Яга добавит в чёрный ещё 2 алмаза, там станет 2018. Кощей не может дополнить его до 2020 одним ходом и, как бы он ни ходил, Баба Яга добавляет 2 в чёрный мешок и выигрывает.

Комментарий Жюри:

1. Если указывался фрагмент верной стратегии - ставился +1 балл.