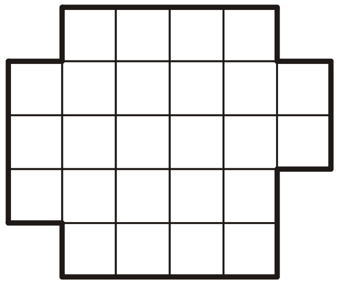
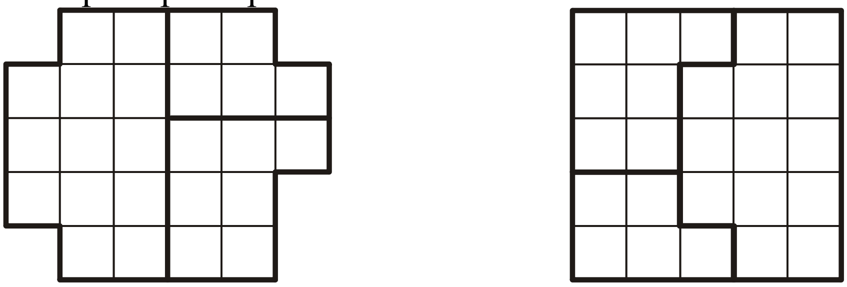
Зимний тур XXVII Турнира Архимеда

Условия и решения задач



Задача 1 (3 балла). Сложите квадрат. Разрежьте фигуру на рисунке на три части, не являющиеся прямоугольниками, так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат. Линии разреза могут идти только по сторонам клеток. Полученные части можно поворачивать, но нельзя переворачивать.

Решение: Пример см. рис.



Примерные критерии:

Приведено решение с переворачиванием полученной части – 1 балл

Приведено верное разрезание, но не показано, как сложить из частей квадрат – 2 балла

Приведено полное решение – 3 балла

Задача 2 (4 балла). Кошкин дом. Имеется 12 сосисок длиной 13 см каждая. Их требуется разделить между 13 котятами, 13 кошками и 13 котами так, чтобы каждому котенку достался кусок сосиски длиной 3 см, каждой кошке — кусок сосиски длиной 4 см, а каждому коту кусок сосиски длиной 5 см. Можно ли это сделать? (Сосиску режут поперек).

Ответ: Можно.

Решение:

Режем сосиски следующим образом:

5 сосисок: 4+4+5 – всего 10 кусков сосисок по 4 см и 5 кусков по 5 см;

4 сосиски: 5+5+3 – всего 8 кусков по 5 см и 4 куска по 3 см;

3 сосиски: 4+3+3+3 – всего 3 куска по 4 см и 9 кусков по 3 см.

Итого: всех нужных видов кусков сосисок по 13 штук.

Примерные критерии:

Приведен верный пример разрезания сосисок – 4 балла

Задача 3 (5 баллов). Утро Бориса. Обычно Борис выезжает на машине на работу в 9:00, а в 9:30 встречает на шоссе маршрутку. Сегодня Борис проспал и выехал на работу в 9:20, но вновь встретил ту же маршрутку. В какое время произошла встреча, если машина Бориса ездит в полтора раза быстрее маршрутки? (Маршрутка ходит по расписанию с постоянной скоростью, на шоссе нигде не останавливается).

Ответ: 9:42

Решение 1 (арифметическое):

В 9:30 маршрутка находится в обычном месте встречи, а машине Бориса осталось ехать до места обычной встречи 20 минут (т.к. к этому моменту был в пути всего 10 мин). Т.к. скорость машины Бориса в 1,5 раза больше скорости маршрутки, то до встречи Борис проедет 3/5 расстояния между ними, а маршрутка 2/5. Борису потребуется $20 \cdot 3/5 = 12$ минут. Т.е встреча произойдет в 9:42 (9:30+0:12).

Аналогичное решение:

Посмотрим на расстояние между машинами в 9:30. Маршрутка окажется в том месте дороги, где обычно встречает машину Бориса. Борису же до этого места нужно будет ехать еще 20 минут, поскольку он выехал на 20 минут позже. Итак, оставшееся между машинами расстояние Борис может проехать за 20 минут, а маршрутка, скорость которой в полтора раза меньше, за 30 минут. Скорость сближения машин в 2,5 раза больше скорости маршрутки, поэтому машины встретятся через 30:2,5=12 минут, в 9:42.

Решение 2 (алгебраическое):

Представим, что движение маршрутки и машины – движение из пунктов А и Б. Примем скорость маршрутки за x км/мин. Тогда исходное расстояние между ними – $2{,}5x \cdot 30 = 75x$ км. Сегодня за 20 минут маршрутка проехала $20x$ км. Тогда в 9:20 расстояние между ними стало $75x - 20x = 55x$ км. Следовательно, они встретятся через: $55x : 2{,}5x = 22$ мин, т.е. в 9:42.

Решение 3 (геометрическое).

Нарисуем на клетчатой бумаге движение навстречу в обычный день и в день опоздания. Удобно считать, что Борис проезжает 1 клетку в минуту. Тогда на каждые три клетки, пройденные Борисом, маршрутка проедет две. Известно, в какой точке маршрутка бывает в 9:30. Если на этих 30 клетках показать положение Бориса в день опоздания, то видно, что он совпадет с положением маршрутки в 9:42.

Примерные критерии:

Только ответ – 1 балл.

Получен верный ответ при конкретных скоростях – 2 балла.

Верный ход решения с арифметической ошибкой или ошибкой при подсчете клеточек на завершающем этапе – 3 балла.

Полное верное решение – 5 баллов.

Задача 4 (5 баллов). Военные учения на острове рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут) решили начать с опроса. Для этого 500 человек построили в виде прямоугольника 20×25 (20 человек в поперечном ряду — шеренге, 25 человек в продольном ряду — колонне). В ходе опроса каждый заявил: 1) «Если не считать меня, в моей шеренге рыцарей больше, чем лжецов», 2) «Если не считать меня в моей колонне лжецов больше, чем рыцарей». По этим данным определите, сколько рыцарей в строю.

Ответ: 240.

Решение: Рассмотрим шеренгу и первое утверждение "Среди остальных 19 большинство рыцарей".

1) Если Рыцарей в шеренге нет, то все Лжецы и все лгут, такое могло быть.

2) Если в шеренге есть Рыцарь, то, кроме говорящего, не менее 10 других рыцарей. Тогда любой лжец будет говорить правду, ведь в его ряду не менее 11 Рыцарей из 19 возможных. Значит, Лжецов в такой шеренге нет. Вся шеренга состоит из Рыцарей. Все они говорят правду, и такое могло быть.

Итог: Любая шеренга состоит либо из 20 Рыцарей, либо из 20 Лжецов.

Рассмотрим колонну и второе утверждение "Среди остальных 24 большинство лжецов".

1) Если Лжецов более 13, то любой Лжец говорит правду, ведь среди остальных не менее 13 лжецов из 24 возможных. Значит, Лжецов не более 13.

2) Если Лжецов менее 13, то Рыцари в колонне есть и любой из них солжет, ведь Лжецов менее 13 из 24 возможных. Значит, Лжецов не менее 13.

Следовательно, Лжецов ровно 13 в любой колонне.

Батальон устроен так: каждая шеренга целиком состоит из Рыцарей или Лжецов, причем шеренг с Лжецами будет ровно 13. Тогда всего Лжецов будет $13 \cdot 20 = 260$. Тогда Рыцарей – $20 \cdot 25 - 260 = 240$.

Замечание: Ответ можно получить, основываясь только на пункте 2 условия: «Если не считать меня, в моей колонне лжецов больше, чем рыцарей», не рассматривая пункт 1.

В этом случае решение будет считаться верным и оцениваться полным баллом.

Примерные критерии:

Только ответ – 1 балл

Доказано, что в шеренге могут быть только лжецы или только рыцари – 1 балл

Показано, что в колонне может быть ровно 13 лжецов, но не показано, что только 13 – 1 балл

Доказано, что в колонне ровно 13 лжецов – 2 балла

Верный ответ (но без объяснений) с указанием про 13 лжецов в колонне и только рыцарями или лжецами в шеренгах – 2 балла

Получен верный ответ с учётом только условия 2), без учета условия 1) – 5 баллов.

Полное решение – 5 баллов

Задача 5 (6 баллов). Весы в Зазеркалье. Из 9 монет одна фальшивая — более легкая. Алисе требуется найти 7 настоящих монет за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь. Возможно ли это? Следует учесть, что весы в Зазеркалье всегда «врут» (то есть показывают неправильное соотношение между грузами на чашках, например, если весы показывают равновесие, на самом деле равновесия нет и какой-то из двух грузов тяжелее).

Ответ: Да.

Решение:

1 взвешивание

Сравним три и три монеты. Последние три отложили.

Если весы показали равенство, то равенства не было. Среди взвешенных фальшивая. Три отложенные монеты – настоящие.

Если весы показали неравенство, легкая чаша не является легкой, на ней настоящие монеты.

При любом исходе нашли три настоящие (обозначим АБВ). Осталось 6 подозрительных.

2 взвешивание

Сравним две и две монеты из шести подозрительных. Еще две монеты отложили.

Если весы показали равенство, то равенства не было. Среди взвешенных монет одна – фальшивая. Две отложенные – настоящие.

Если весы показали неравенство, легкая чаша не является легкой, на ней настоящие монеты.

При любом исходе нашли еще две настоящие монеты (обозначим ГД). Осталось 4 подозрительные монеты.

3 взвешивание

Сравним две монеты из четырех подозрительных. Еще две монеты отложили.

Если весы показали равенство, то равенства не было. Среди взвешенных фальшивая монета. Две отложенные монеты – настоящие. Найдено 7 настоящих монет.

Если весы показали неравенство, легкая чаша не является легкой, на ней настоящая монета. Нашли еще одну настоящую монету. Осталось найти одну из трех оставшихся.

4 взвешивание

Повторим Третье взвешивание для любых двух монет из трех подозрительных. Одну настоящую найдем.

Примерные критерии:

Показано, что при равенстве настоящие монеты отложенные – 1 балл

Показано, что при неравенстве настоящие монеты на лёгкой чашке – 1 балл

Полное решение – 6 баллов

При верной идее за погрешности в объяснениях снимаются баллы

Задача 6 (5+5 баллов). Али-Баба хочет попасть в пещеру с сокровищами. Вход в пещеру откроется, если Али-Баба расставит числа от 1 до 25 в кодовой таблице 5×5 (по одному числу в каждую клеточку) так, чтобы сумма чисел внутри любого «зигзага» из четырех клеток (рис. 1) была кратна 5.

А) Сможет ли он войти?

Б) Изменится ли ответ, если потребовать, чтобы сумма чисел внутри любой «полоски» из четырех клеток (рис. 2) была кратна 5?

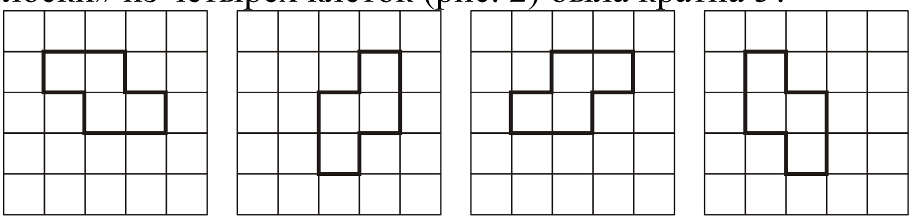


Рис. 1

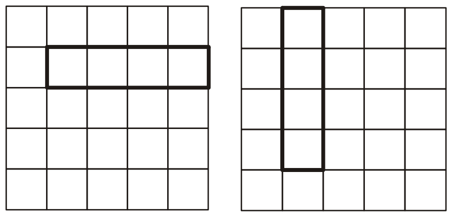


Рис. 2

Ответ: а) нет, не сможет; б) да, изменится.

Решение.

Заметим, что среди чисел от 1 до 25 имеется ровно по 5 чисел, дающих при делении на 5 каждый из возможных остатков:

остаток 1 дают числа 1; 6; 11: 16; 21,

остаток 2 – числа 2; 7; 12; 17; 22,

остаток 3 – числа 3; 8; 13; 18; 23,

остаток 4 – числа 4; 9; 14; 19; 24,

остаток 0 (т.е. делятся на 5 без остатка) числа 5; 10; 15; 20; 25.

А) Решение

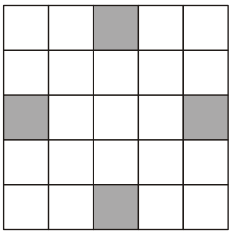
Для фигуры «зигзаг» – можно получить, например, следующим рассуждением. Рассмотрим два «зигзага», имеющих три общие клеточки, например, «зигзаг», в котором стоят числа a,b,c,x, и «зигзаг», в котором стоят числа a,b,c,y.

	x			
	a	b		
		c	y	

			x	
		b	a	
	y	c		

Поскольку суммы $a+b+c+x$ и $a+b+c+y$ делятся на 5, то и разность этих сумм, то есть число $x-y$, тоже делится на 5. Таким образом, разность чисел, стоящих через одно по диагонали, делится на 5 (числа имеют одинаковый остаток при делении на 5).

На рисунке ниже некоторые из таких чисел (т.е. соответствующих клеточек) закрашены. Их четыре.



Но как было отмечено в самом начале решения, чисел, дающих при делении на 5 одинаковые остатки, имеется ровно пять. Значит, есть ещё одна клеточка, которая должна быть закрашена. Но тогда, кроме этой клеточки, есть ещё как минимум одна, стоящая от неё через одну по диагонали, и она тоже должна быть закрашена. Таким образом, в квадрате найдётся по меньшей мере шесть чисел, дающих при делении на 5 одинаковые остатки. Противоречие.

Б) Решение: См. пример.

10	9	19	22	20
6	4	3	2	1
16	5	21	13	11
18	7	17	8	23
15	14	24	12	25

Остатки при делении на 5:

0	4	4	2	0
1	4	3	2	1
1	0	1	3	1
3	2	2	3	3
0	4	4	2	0

Примерные критерии:

Пункт а)

Доказано, что разность чисел, стоящих через одно по диагонали, делится на 5 – 2 балла.

Высказано, но не обосновано пояснениями или рисунком, утверждение, что если сможет, то в квадрате найдётся по меньшей мере шесть чисел, дающих при делении на 5 одинаковые остатки – 1 балл.

Полное решение – 5 баллов.

Пункт б) Верный пример – 5 баллов