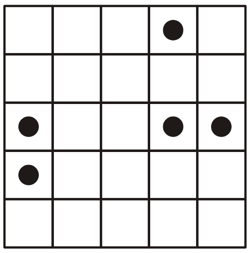
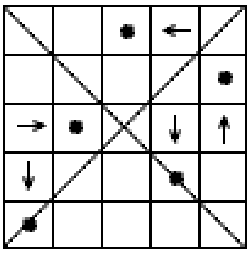
Зимний тур XXIII Турнира Архимеда

Условия и решения задач

Задача 1 (3 балла). Требуется передвинуть каждую из пяти фишек на соседнюю клетку так, чтобы в итоге в каждой строке, каждом столбце и на каждой диагонали оказалось не более одной фишки. (*Две клетки называют соседними, если они имеют общую сторону.*) Покажите, как это сделать. (*Передвижения фишек покажите стрелками*)



Ответ: см. рисунок



Примечание:

Решение единственное, но от участников доказательства не требовалось.

Задача 2 (4 балла). (*старинная задача*) Ротная колонна движется по направлению к штабу со скоростью 6 км/час. В 9.00 командир роты отправил почтового голубя с донесением в штаб. Голубь доставил донесение и сразу полетел обратно и вернулся в колонну. В какое время голубь долетел до штаба, если его скорость – 10 км/час, а вернулся он в 9.45?

Ответ: 9 ч 36 мин.

Решение 1:

Если считать колонну неподвижной, то голубь сначала уходит вперед со скоростью 4 км/ч, а потом возвращается обратно со скоростью 16 км/ч. Так как он возвращается со скоростью в 4 раза большей, чем удаляется от колонны, то и времени тратится в 4 раза меньше, 0,2 от общего времени отсутствия. Следовательно, на обратный путь тратится 9 минут.

Следовательно, в штабе он оказался в 9 ч 36 мин.

Решение 2:

Представим движение голубя и колонны как движение из двух пунктов навстречу друг другу. При этом они находятся на равном расстоянии от штаба, т.е. штаб располагается посередине.

Все время в пути голубя и ротной колонны до их встречи – 45 минут или три четверти часа. Скорость их сближения – 16 км/ч. Тогда весь путь между двумя пунктами составляет – $16 \cdot 3/4 = 12$ км.

Т.к. штаб располагается посередине, то расстояние до него составляет 6 км. Следовательно, голубь до штаба был в пути – $6:10 = 0{,}6$ ч или 36 минут, т.е. в штабе голубь окажется в 9 ч 36 мин.

Решение 3.

За 45 минут или ¾ часа голубь пролетел 7,5 км, а колонна прошла 4,5 км. Значит, удвоенное расстояние от старта голубя до штаба равно $7{,}5 + 4{,}5 = 12$ км. Т.е. от старта до штаба голубь пролетел 6 км. Со скоростью 10 км/час он это сделал за 36 минут.

Примечание:

За вычислительную ошибку на последних шагах снимался 1 балл.

Задача 3 (5 баллов). Маша и Катя играют в такую игру: по очереди обрывают лепестки у ромашки с 64 лепестками. За один ход разрешается сорвать любое нечетное количество лепестков, меньшее 16, причем запрещается повторять уже сделанные ходы. (*Например, если Катя при своём ходе сорвет 3 лепестка, то в дальнейшем ни Маша, ни Катя сорвать 3 лепестка не имеют права.*) Выигрывает тот, кто сорвет последний лепесток. Начинает Маша. Кто из них выиграет, как бы ни играл соперник?

Ответ: выиграет Катя.

Решение:

По условию в игре есть ровно 8 разрешенных ходов: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Заметим, что $1+3+5+7+9+11+13+15=64$.

Поэтому, независимо от того, как сложится игра, она закончится тогда, когда будут сделаны по разу все 8 разрешенных ходов.

Примечания:

Возможно и такая более конкретная стратегия: дополнение до 16 или как-нибудь еще, поскольку, по сути, все равно как играть, но это все равно означает, что важно заметить, что $1+3+5+7+9+11+13+15 = 64$.

Если не указывалось, что сумма равна 64, то решение оценивалось в 2 балла.

За ответ без обоснования баллы не ставились.

Задача 4 (6 баллов). На конференции по математической физике за круглым столом собрались рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы – врут), причём известно, что среди физиков и математиков лжецов поровну. Каждому из участников конференции задали вопрос: «кто ваш сосед справа, физик или математик?». Подводя итоги, председатель заметил: «интересно, что нас здесь 34 человека, причём физиков и математиков поровну, однако каждый утверждает, что его сосед справа – математик». Определите, кем был председатель – рыцарем или лжецом?

Ответ: председатель – лжец.

Решение.

Предположим, что председатель – рыцарь.

Решение 1:

По условию задачи среди физиков и математиков лжецов поровну, то есть число всех лжецов – четно. Тогда всего 34 человека, и 17 из них – математики. Получается, что ровно половина сказавших – 17 человек – солгали. Противоречие. Значит, председатель конференции – лжец.

Решение 2:

По условию задачи среди физиков и математиков лжецов поровну, тогда, учитывая равное количество математиков и физиков (по 17), следует, что количество физиков-рыцарей и математиков-рыцарей также одинаково. Тогда правее каждого математика-лжеца сидит несколько физиков (может быть и не одного!), причём последний из этой серии физиков, обязательно, физик – рыцарь. То есть, на каждого математика-лжеца приходится физик-рыцарь, сидящий правее, а, следовательно, число математиков-лжецов равно числу физиков-рыцарей.

Но количества физиков-рыцарей и математиков-рыцарей одинаковы, как и количества физиков-лжецов и математиков-лжецов одинаковы. Следовательно, число участников конференции в этом случае кратно 4, а председатель конференции – лжец.

Примечания:

При написании решения необходимо было обосновывать ***каждый*** *промежуточный вывод. При отсутствии обоснования того или иного промежуточного вывода ставилось 2 или 4 балла (в зависимости от числа пропущенных обоснований).*

За рассмотрение частного случая расположения математиков и лжецов – 1 балл

За ответ без обоснования (или с неверным обоснованием) баллы не ставились.

Задача 5 (7 баллов). Вася оклеил (без наложений и разрывов) грани куба $5\times5\times5$ бумажными полосками 2×1, причем некоторые полоски оказались согнуты пополам (*остальные полоски не согнуты*). Каждая полоска покрывает ровно две клетки. Могло ли число согнутых полосок оказаться чётным?

Ответ: не могло.

Решение:

Покрасим каждую грань куба 5×5 в шахматном порядке, при этом угловая клетка пусть будет черной. Тогда черных клеток на 6 больше, чем белых. Каждая полоска покрывает две соседних клетки. Полоска покрывает клетки одного цвета только, если она перегнута. Получается, что полосок покрывающих только черные клетки на 3 больше, чем полосок, покрывающих только белые клетки.

Следовательно, их количества имеют разную четность, а общее число полосок нечетное.

Примечания:

Подавляющее большинство участников пытались решить данную задачу, опираясь на следующее утверждение: при четном числе согнутых полосок какой-нибудь гранях обязательно окажется нечетное число клеток.

Отметим, что данное утверждение неверно. Приведем пример:

Пусть у нас есть 4 согнутые полоски. Три полоски захватывают верхнюю грань и по одной боковой, а четвертая захватывает нижнюю и оставшуюся боковую.

Тогда на каждой грани закрыто нечетное число клеток.

При этом покрыть оставшееся четное количество клеток на каждой грани полосками 2×1 *невозможно.*

За ответ без обоснования баллы не ставились.

Задача 6 (8 баллов). Незнайка переставил цифры в некотором числе A и получил число B. Затем он вычислил разность $A-B$ и получил при этом число, записанное с помощью одних единиц *(другие цифры не использовались)*. Какое наименьшее число могло у него получиться?

Ответ: 111111111.

Решение:

У чисел с одинаковой суммой цифр, одинаковые остатки при делении на 9.

Следовательно, разность двух чисел, получаемых друг из друга перестановкой цифр кратна 9.

Следовательно, число $A-B$ содержит не менее девяти единиц.

Пример: $987654320-876543209=111111111$.

Примечания:

Наличие примера (без обоснования кратности) – 4 балла

Обоснование кратности 9 (без примера) – 3 балла

Полное решение – 8 баллов