

Задача 1. (5 баллов) **Восстановите пример** на деление с остатком. Все цифры в записи примера — различны (заменены звездочками). Достаточно привести пример.

$$\begin{array}{r} \text{---} \quad * * * \mid * * \\ \quad \quad * * \mid * \\ \hline \quad \quad \quad * \end{array}$$

Ответ:

$$\begin{array}{r} \text{---} \quad 103 \mid 48 \\ \quad \quad 96 \mid 2 \\ \hline \quad \quad \quad 7 \end{array}$$

Примечание: решение единственное, от участников доказательства не требовалось.

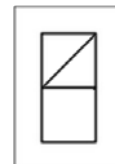
ПРИМЕРНЫЕ КРИТЕРИИ:

Верный пример – 5 баллов

Задача 2. (5 баллов) **Карточки с цифрами.** На 10 одинаковых прозрачных карточках написали цифры от 0 до 9.



Взяли несколько карточек и выложили из них число. После этого сложили выбранные карточки в стопку (вид сверху см. рисунок). Какое **а)** наименьшее, **б)** наибольшее число могло быть выложено? Карточки складывали в аккуратные стопки, не поворачивали и не переворачивали.



Ответ: **а)** 18, **б)** 8765410.

Решение.

а) Использовано не менее двух разных карточек. Значит, выложенное число — не менее, чем двузначное, причем цифры в нем разные. Первая цифра — не «0», значит, первая цифра не менее «1», вторая цифра может быть «8».

Значит, наименьшее возможное число — 18.

б) Посмотрим, какие карточки могли лежать в такой стопке.

Карточки «2», «3» и «9» использоваться не могут, ведь нижней диагональной линии. Остальные карточки использоваться могут, но каждая — не более, чем по одному разу, ведь все карточки в единственном экземпляре. Чтобы число было наибольшим, нужно использовать как можно больше цифр, то есть число не более, чем 7-значное. При этом в старших разрядах должны быть цифры как можно больше. Значит, наибольшее возможное число — 8765410.

ПРИМЕРНЫЕ КРИТЕРИИ:

а) 1 балл за верный пример +1 балл за обоснование (объяснено почему число двузначное)

б) 2 балла за ответ +1 балл за обоснование (объяснено, какие цифры быть не могут)

Задача 3. (6 баллов) **Дама и весы.** Известно, что весы показывают вес с ошибкой, не превышающей 500 г. Весы показали, что вес саквояжа — 4 кг 200 г, а вес чемодана — 15 кг 100 г, а вес чемодана вместе с саквояжем — 20 кг 800 г. Помогите даме определить правильный вес каждой вещи.

Ответ. Саквояж 4,7 кг (4 кг 700 г), чемодана 15,6 кг (15 кг 600 г).

Решение.

Поскольку ошибка в пределах 0,5 кг, то вес саквояжа и чемодана вместе не менее, чем $20,8 - 0,5 = 20,3$ (кг). При этом вес саквояжа не более, чем $4,2 + 0,5 = 4,7$ (кг), а вес чемодана не более, чем $15,1 + 0,5 = 5,6$ (кг), то есть вместе, не более, чем $4,7 + 5,6 = 10,3$ (кг). Значит, вес вместе ровно 20,3 кг, а отдельно вес саквояжа 4,7 кг, а чемодана — 15,6 кг.

ПРИМЕРНЫЕ КРИТЕРИИ:

Верный ответ – 1+1 балл (за каждый 1 балл)

Обоснование – 4 балла

Задача 4. (6 баллов) **Продуктовые наборы.** Требуется разложить 60 яблок и 60 апельсинов по продуктовым наборам так, чтобы число яблок во всех наборах было одинаковым, а число апельсинов разным. Какое наибольшее число наборов может получиться? В наборе должен быть хотя бы один апельсин.

Ответ: 10.

Решение.

1. Оценка.

Если наборов — 11, то количество яблок в них не меньше $1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 = 66 > 60$. Следовательно, наборов не более 10.

2. Вариантов много. Например, в 10 вазах по 6 яблок, апельсины распределены, например, так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 15 или другие варианты:

ПРИМЕРНЫЕ КРИТЕРИИ:

Ответ – 1 балл

Пример – 2 балла

Оценка – 3 балла

Задача 5. (7 баллов) **Летняя прогулка.** Обычно Маша встает рано и в 7:00 выходит на прогулку по одной и той же лесной тропинке. Ровно в 7:55 она здоровается с Дашей, которая тоже гуляет по этой же тропинке. Сегодня Маша проспала и вышла на прогулку в 7:35. В какое время она поздоровается с Дашей, если скорость Даши на четверть меньше скорости Маши? Скорости девочек постоянны.

Ответ. В 8:15 или 10:15.

Решение.

В 7:55 Маше до обычного места встречи Маше останется 35 минут, а Даша его уже достигнет.

а) Если они дальше идут навстречу друг другу, то их скорость сближения составляет $\frac{7}{4}$ обычной и, чтобы встретиться им потребуется $35 : \frac{7}{4} = 20$ минут, то есть они встретятся в 8:15.

б) Если идут в одном направлении, то их скорость сближения равна обычной скорости Маши, чтобы встретиться, потребуется им $35 : 1 = 35$ минут, то есть 2 часа 5 минут. Таким образом, они встретятся в 10:15.

ПРИМЕРНЫЕ КРИТЕРИИ:

Полное решение (движение в одну сторону) – 3 балла, только ответ – 1 балл

Полное решение (движение в обе стороны) – 7 баллов, только ответы – 2 балла

Задача 6. (7 баллов) **На острове 36 жителей.** Часть из них — рыцари (всегда говорят правду), часть — лжецы (всегда лгут), остальные туристы (чередуют правду и ложь). Каждому жителю был задан вопрос: «Верно ли, что на острове рыцарей больше, чем лжецов»? Ответов «да» и «нет» было поровну. Затем всем был задан второй вопрос: «Правда ли, что туристов больше, чем рыцарей»? Опять ответов «да» и «нет» было поровну. Могло ли оказаться, что среди жителей острова лжецов больше, чем рыцарей?

Ответ: нет.

Решение:

Пусть P — рыцари, L — лжецы, TL — туристы, начавшие со лжи, TP — туристы, начавшие с правды.

Предположим противное: ответ — да!

Тогда, на первый вопрос: число осветивших «да» и «нет» одинаково, поэтому солгавших и сказавших правду — поровну, т.е. $L+TL=P+TP=18$.

На второй вопрос, но туристы ответившие правду на первый вопрос теперь солгали, а солгавшие туристы теперь ответили правду, т.е. $L+TP=P+TL=18$.

Из двух утверждений получаем, что $L=P$, а $TL=TP$, т.е. лжецов на острове столько же, сколько и рыцарей.

ПРИМЕРНЫЕ КРИТЕРИИ:

Только верный ответ «нет» – 0 баллов

Верный ответ на каком-либо примере – 2 балла

Верное решение – 7 баллов