Весенний тур XXXII Турнира Архимеда. 5 класс
9 апреля 2023 года
Личный этап

Задача 1. (2+2 балла) Кошки-мышки. В клетки доски 5×5 требуется посадить ненулевое количество кошек и ненулевое количество мышек (в одной клетке — не более одного животного) так, чтобы ни одна мышка не была съедена. Кошка съедает мышку, если они оказываются в клетках одной строки или одного столбца. Выполните задание так, чтобы кошек и мышек было:

а) как можно больше (суммарно). В ответ запишите число и рисунок.

б) как можно больше (суммарно), при условии, что кошек и мышек — поровну. В ответ запишите число и рисунок.

Ответ: а) 17. Возможный пример приведен на рис. 1; б) 12. Возможный пример приведен на рис. 2.

К	К	К	К	
К	К	К	К	
К	К	К	К	
К	К	К	К	
				М

Рис. 1

		К	К	К
		К	К	К
М	М			
М	М			
М	М			

Рис. 2

Возможны и другие рисунки (перестановки строк и (или) столбцов)

КРИТЕРИИ:

За правильный ответ (с рисунком) - 2 балла.
Если количество животных не указано (при верном рисунке) – минус 1 балл.
Обосновывать ответ не обязательно.

Задача 2. (4 балла) Несколько (не менее двух) жителей Острова рыцарей и лжецов встретились за столом (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Каждый из них сказал: «Среди остальных не менее пяти лжецов». Сколько лжецов могло быть среди собравшихся? Найдите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 2,3,4,5 Лжецов.

Решение: Заметим, что если лжецов (Л) было хотя бы 6, то каждый из них сказал правду. Значит, Л не более 5.

Л может быть 5, при любом числе рыцарей (Р) (от 0 до бесконечности). Л может быть 4,3,2 при условии, что Р нет.

Если Л только один, а людей более одного в комнате, то есть еще хотя бы один Р. Но такие Р соврут. Значит, ровно 1 Л быть не может.

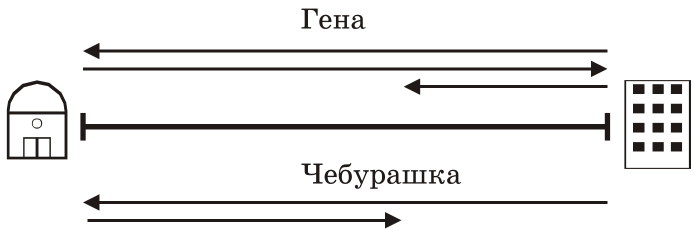
КРИТЕРИИ:

За обоснование, что Л не более 5 - 1 балла.
За обоснование, что Л не может быть 1 – 1 балла.
Обосновано только ответ 5 – 1 балл
За обоснование, что 2,3,4,5 Л может быть – 2 балла.
MAX 4 балла.

Задача 3. (5 баллов) Гена и Чебурашка одновременно побежали от подъезда дома к киоску с мороженым. Гена добежал до киоска, развернулся и побежал обратно. Добежав до подъезда, Гена снова развернулся и побежал к киоску. По пути он снова встретил Чебурашку, который еще не успел вернуться домой. Известно, что скорость Чебурашки в два раза меньше скорости Гены, и Чебурашка пробежал всего 80 метров. Каково расстояние от подъезда до киоска?

Ответ: 60 метров.

Решение. Нарисуем путь Гены и Чебурашки.



Гена вдвое быстрее, значит, пробежал вдвое больше. Заметим, что так как скорость Гены в два раза больше, то за то время, за которое Чебурашка пробежал один полный путь, Гена пробежит два полных пути. Затем Гена пробежал еще некоторое расстояние, а Чебурашка — в два раза меньшее. Всего получается, что Чебурашка пробежал один путь и еще треть от него, всего 4 части, которые составили 80 м. Тогда искомое расстояние составляет 3 части, т.е. 60 м.

КРИТЕРИИ:
Полное решение - 5 баллов.
Задача решена на частном случае (в т.ч. через проверку ответа) – 2 балла.
Только ответ – 1 балл.
MAX: 5 баллов.

Задача 4. (6 баллов) Петя использует навигатор, чтобы добраться до города *N*. Петя знает, что навигатор сломался и теперь указывает верные цифры, но, возможно, в неверном порядке. В какой-то момент пути навигатор показал, что Петя проехал 1416 км из 7413 км. Известно, что в реальности разница между длиной маршрута и тем, сколько он проехал, наименьшая из возможных при данном условии. Сколько всего километров должен был проехать Петя до города *N*?

Ответ: 1473 или 4173 километров.

Решение. Для того, чтобы число километров было наименьшим, надо, чтобы как можно больше старших разрядов в числе совпадало, а те разряды, что различаются, различались бы как можно меньше.

Имеются совпадающие цифры во втором и третьем разрядах, значит надо проверить 1, 6, 3 и 7. Из них меньше всех различаются 6 и 7. Значит, исправный навигатор мог показывать 1461 из 1473 или 4161 из 4173 километров. Значит Пете осталось проехать 12 километров, и до города *N* может быть 1473 или 4173 километров.

КРИТЕРИИ:
Полное решение - 6 баллов.
Полное решение, но один случай потерян – 4 балла.
Только ответ, один из двух – 1 балл.
Только ответ, оба – 2 балл.
MAX: 6 баллов.

Задача 5. (8 баллов) Начинающий маг Мусса пытается избавиться от беспорядка на кухне. Там находятся 23 грязные тарелки (ГТ), 25 коробок от пиццы (КП) и 18 пустых молочных бутылок (МБ). Мусса знает три заклинания:

1) Превращает 3 ГТ и 3 КП в 1 МБ.
2) Превращает 8 МБ в 2 ГТ.
3) Превращает 9 МБ в 1 ГТ и 1 КП.

С помощью этих заклинаний Мусса добился того, что на кухне остался всего один предмет из перечисленных.

а) Какой предмет остался?

б) Приведите пример, как он мог этого добиться.

Ответ: а) молочная бутылка. б) см. решение.

Решение:

I а) Будем следить за четностью величин ГТ, КП, МБ.

Заклинание 1 меняет четность всех трех величин $(-3; -3; +1)$.

Заклинание 2 не меняет четности всех трех величин $(+2; +0; -8)$.

Заклинание 3 меняет четность всех трех величин $(+1; +1; -9)$.

Получается, что величины, которые изначально были одной четности, всегда останутся одной, а величины разной четности останутся разной. В начале ГТ и КП были одной четности, МБ другой. В итоге осталось 0, 0 и 1 предметов, то есть два значения одной четности и одна — другой. Оставшимся предметом может быть только МБ.

II а) Заметим, что после 2 и 3-го заклинаний остаётся 2 предмета, а после 1-го – 1 предмет, следовательно если на кухне остался один предмет, то им может быть только МБ (после 1го заклинания)

б) Алгоритм, может быть, например, такой:

Грязные тарелки	Коробки от пиццы	Бутылки от молока	Заклинания
23	25	18	2 раза 3)
25	27	0	8 раз 1)
1	3	8	1 раз 2)
3	3	0	1 раз 1)
0	0	1	

КРИТЕРИИ:

Полное обоснование пункта а) – 4 баллов.

Есть идея четности, но полностью не доказана в пункте а) – 2 балла.

Верный пример в пункте б) с проверкой, что он работает – 4 балла.

Пример написан, но не доказано, что подходит (но он подходит) – 2 балла.

Только ответ – 1 балл.

MAX: 8 баллов.