Весенний тур XXVI Турнира Архимеда
2 апреля 2017.
5 класс.
Личный тур.

№ 1 ***(3 балла)*** Саша решил отправить своему другу письмо и начал заполнять индекс на конверте. Написал первые три цифры: 746 и тут понял, что конверт лежит вниз головой. Он перевернул конверт и заметил, что можно дорисовать некоторые черточки и записать верный индекс. Какой почтовый индекс у Сашиного друга?

Ответ: 746982.

Критерии:

•верно записаны все 6 цифр: **3** балла;

•верно записаны 5 цифр: **2** балла;

•верно записаны 4 цифры: **1** балла;

•верно записаны 3 и менее цифр: **0** баллов.

№ 2 ***(4 балла)*** Каждые сутки Леша спит не меньше, чем учится, учится не меньше, чем развлекается, а развлекается столько, сколько может. Сколько часов в сутки Леша развлекается? *(Ответ обоснуйте)*

Ответ: 8 часов.

Решение. Леша может развлекаться 8 часов: в этом случае он учится 8 и спит тоже по 8 часов. А более 8 часов Леша развлекаться не может, так как в этом случае он и учится, и спит тоже более 8 часов, следовательно в сутках получается более 24 часов. Противоречие.

Критерии (баллы суммируются):

•дан верный ответ: **1** балл;

•показано, что Леша может развлекаться 8 часов: **1** балл;

•доказано, что более 8 часов Леша развлекаться не может: **2** балла.

№ 3 ***(5 баллов)*** Катя и Аня бегают по круговой дорожке длиной 400 м, при этом скорость Кати в полтора раза больше скорости Ани. Найдите скорость Кати, если каждые 6 минут она обгоняет Аню на круг.

Ответ: 12 км/ч.

Решение. I способ. За 6 минут Катя пробегает больше Ани на один круг, то есть на 400 м. Значит их скорость отдаления 0,4 км : 0,1 ч = 4 км/ч, из условия следует, что это половина скорости Ани. Таким образом, скорость Ани 8 км/ч, а скорость Кати — 12 км/ч.

II способ. Пусть x км/ч — скорость Ани, тогда $1{,}5x$ км/ч — скорость Кати. Зная, что за 0,1 ч Катя пробегает на 0,4 км больше Ани, составим уравнение: $0{,}1 \cdot 1{,}5x - 0{,}1x = 0{,}4$. Откуда $x = 8$, следовательно скорость Кати — 12 км/ч.

Критерии (применяется первый подходящий критерий):

•приведено верное решение и получен верный ответ: **5** баллов;

•приведено верное решение, но в ответе указана скорость Ани: **4** балла;

•приведено верное решение, но получен неверный ответ из-за арифметической ошибки: **3** балла;

•приведен только верный ответ: **1** балл.

№ 4 ***(6 баллов)*** Игорь задумал три различные ненулевые цифры и записал все возможные трехзначные числа, которые можно составить из этих цифр (используя в каждом числе каждую цифру один раз). Какие цифры задумал Игорь, если сумма всех полученных чисел равна 1554?

Ответ: 1, 2 и 4.

Решение. Заметим, что всего Игорь записал шесть чисел, при этом каждая цифра два раза встретилась в разряде сотен, два раза — в разряде десятков и два раза — в разряде единиц. Пусть s — сумма задуманных Игорем цифр. Тогда сумма всех сотен этих чисел $2s \cdot 100$, десятков — $2s \cdot 10$ и единиц —

2s. Таким образом, сумма всех числе 222s. Зная, что она равна 1554, находим s = 7. Единственные три различные ненулевые цифры с суммой 7 — это 1, 2 и 4 (наименьшая сумма трех различных ненулевых цифр 1 + 2 + 3 = 6, чтобы получить сумму, равную 7, необходимо одну из цифр увеличить на один, но, если увеличить 1 или 2, полученные цифры не будут различными).

Критерии (применяется первый подходящий критерий):

- приведено верное решение и получен верный ответ: **6** баллов;
- верно найдена сумма загаданных цифр: **4** балла;
- в том или ином виде получено, что сумма всех записанных чисел 222s: **3** балла;
- приведен только верный ответ: **1** балл.

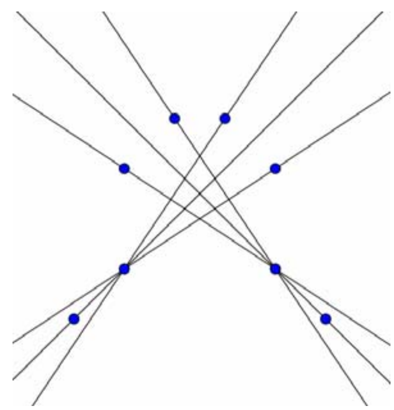
№ 5 ***(6 баллов)*** У продавца сахара есть чашечные весы и набор гирь 1, 2, 4 и 8 кг. Одна из гирь фальшивая — она весит меньше номинала. За одно взвешивание разрешается положить на весы гири (не обязательно на одну чашу) и насыпать на одну из чаш сахар, пока весы не придут в равновесие. Отмеренное таким образом количество сахара можно пересыпать в пакет и использовать в дальнейших взвешиваниях. Укажите, как за три взвешивания вывести продавца на "чистую воду", то есть доказать, что одна из гирь фальшивая.

Решение. Первым взвешиванием положим на одну чашу весов гирю номиналом 8 кг и отмерим соответствующее количество сахара в мешок «А». Вторым взвешиванием положим на одну чашу весов гири номиналами 1, 2 и 4 кг и отмерим соответствующее количество сахара в мешок «Б». В последнем взвешивании на левую чашу положим мешок «А», а на правую — мешок «Б» и гирю номиналом 1 кг.

Докажем, что если одна из гирь была фальшивой, то весы не будут в равновесии. Если фальшивой была гиря номиналом 8 кг, то на левой чаше весов на самом деле менее 8 кг сахара, а на правой ровно 8 кг: 7 «настоящих» килограммов сахара и настоящая же гиря в 1 кг. Если фальшивой была гиря в 1, 2 или 4 кг, то на левой чаше «настоящие» 8 кг сахара, а на правой менее 8 кг: в мешке на самом деле менее 7 кг сахара, да и еще килограммовая гиря, возможно, фальшивая.

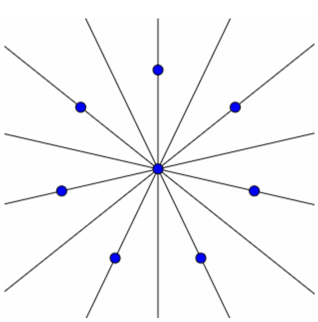
Критерии (применяется первый подходящий критерий):

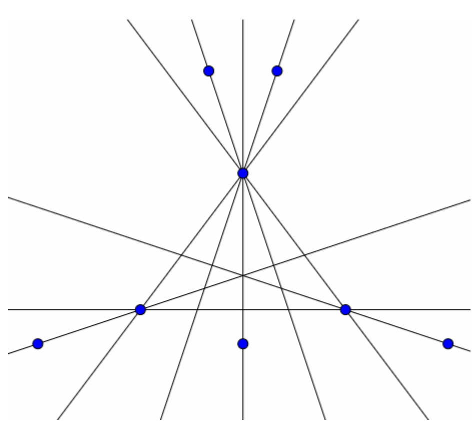
- приведено верное и обоснованное решение: **6** баллов;
- приведен верный алгоритм, но он не обоснован: **4** балла.

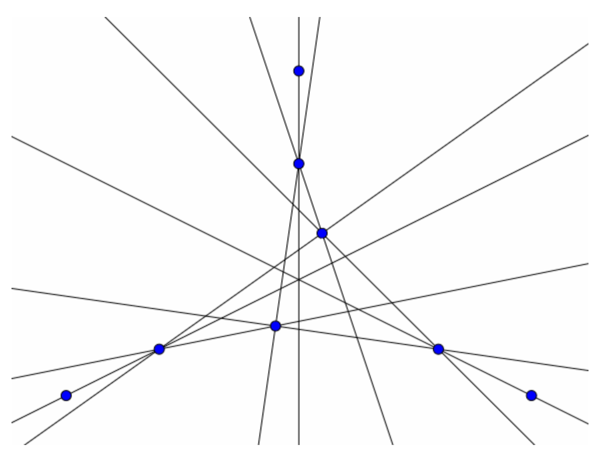


№ 6 ***(по 3 балла за каждую прямую сверх шести)*** Петя отметил на плоскости 8 точек и провел 6 прямых (каждую ровно через две отмеченные точки) так, чтобы по обе стороны от каждой прямой было одинаковое количество точек (см. рис.). Улучшите Петино достижение: отметьте на плоскости 8 точек (не обязательно так, как на рисунке) и проведите большее количество прямых с таким же условием.

Ответ: см. рис. Приведены решения на 7, 8 и 9 прямых соответственно. Жюри неизвестно, можно ли провести более 9 прямых с таким условием.







Критерии:

- по **3** балла за каждую удовлетворяющую условию прямую сверх шести;
- по **–1** баллу за каждую не удовлетворяющую условию прямую.