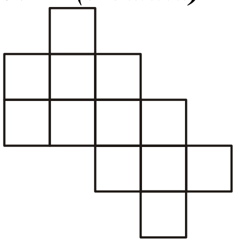
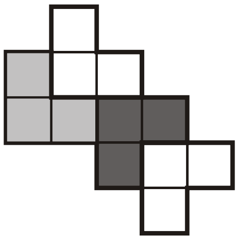
Весенний тур XXIV Турнира Архимеда
5 апреля 2015.
5 класс.
Личный тур.

№ 1. ***(3 балла)*** Разрежьте фигуру на 4 равные части.



Ответ:



№ 2. ***(4 балла)*** Нынешний 2015 год записывается четырьмя цифрами: 0, 1, 2 и 5. Сколько раз в будущем год будет записываться этими же четырьмя цифрами? Ответ объясните.

Ответ: 11

Решение. Цифры 0 и 1 не могут быть в будущем на первом месте. Значит, все возможные года будут начинаться или с цифры 2, или с цифры 5. Из трех различных цифр можно составить 6 различных трехзначных чисел. Таким образом, в каждом из двух тысячелетий будет по 6 лет, номера которых составлены из наших цифр. Но в нашем тысячелетии 2015 год уже наступил, причем он наименьший из возможных. Поэтому в будущем будет только 11 таких лет. Вот эти года: 2051; 2105; 2150; 2501; 20510; 5012; 5021; 5102; 5120; 5201 и 5210.

<u>Критерии:</u>

- Верное обоснование, но перечислены не все года – 2 балла.
- Без обоснования перечислено не менее 7 лет – 1 балл.
- «Голый» ответ – 1 балл.

№ 3. ***(5 баллов)*** На доске записано несколько натуральных чисел. Сумма этих чисел равна их произведению и равна 2015. Какое самое маленькое количество таких чисел может быть написано на доске?

Ответ: 1609.

Решение. Число 2015 можно представит в виде произведения *различных* множителей пятью способами:

1) $2015 \cdot 1$, но тогда их сумма равна 2016 и этот способ нам не подходит;

2) $5 \cdot 13 \cdot 31$, тогда их сумма 49, и чтобы сумма равнялась произведению, надо добавить ещё 1966 множителей равных «1». Тогда всего чисел будет 1969.

3) $65 \cdot 31$, тогда их сумма 96, и чтобы сумма равнялась произведению, надо добавить ещё 1919 множителей равных «1». Тогда всего чисел будет 1921.

4) $13 \cdot 155$, тогда их сумма 168, и чтобы сумма равнялась произведению, надо добавить ещё 1847 множителей равных «1». Тогда всего чисел будет 1849.

5) $5 \cdot 403$, тогда их сумма 408, и чтобы сумма равнялась произведению, надо добавить ещё 1607 множителей равных «1». Тогда всего чисел будет 1609.

Наименьшее количество чисел 1609.

<u>Критерии:</u>

- Рассмотрены все случаи, но дан неверный ответ из-за арифметической ошибки – 4 балла.
- Рассмотрены n случаев из 5, и для этого рассмотрения дан верный ответ – 1 балл за каждый рассмотренный случай.
- Рассмотрено только разложение на простые множители, и для него дан верный ответ – 2 балла.
- «Голый» ответ – 0 баллов.

№ 4. ***(6 баллов)*** Фрекен Бок разложила плюшки на 15 тарелок: одну плюшку на первую тарелку, две – на вторую, 3 – на третью, …, 15 – на 15-ю. Время от времени в окно влетает Карлсон. Он выбирает несколько тарелок и съедает по одинаковому количеству плюшек с каждой из них. Покажите, как за 4 таких визита Карлсон сможет съесть все плюшки.

Решение.
Например так: (заливкой выделены тарелки, с которых Карлсон берет плюшки)

Первоначально	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
После первого «влета» (по 1 плюшке)	0	2	2	4	4	6	6	8	8	10	10	12	12	14	14
После второго «влета» (по 2 плюшки)	0	0	0	4	4	4	4	8	8	8	8	12	12	12	12
После третьего «влета» (по 4 плюшки)	0	0	0	0	0	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8
После четвертого «влета» (по 8 плюшек)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Критерии:

- Решение выполнено не до конца (описаны 2 «влета» и начато описание 3-го), но может быть доведено до правильного – 3 балла
- Рассуждение о том, что хотя бы в один прилет Карлсон должен взять ровно по одной плюшке ***и не со всех тарелок*** – 1 балл

№ 5. ***(7 баллов)*** Один гном по понедельникам всегда врёт, по средам и четвергам говорит только правду, а в остальные дни недели может, как правду сказать, так и соврать. Шесть дней подряд Белоснежка спрашивала у него, как его зовут, и вот какую последовательность ответов она услышала: Дима, Вова, Дима, Вова, Петя, Вова. а) Как зовут гнома? б) в какой день недели Белоснежка начала спрашивать гнома?

Ответ: а) Дима; б) в четверг.

Решение. Так как по средам и четвергам гном говорит правду, то два ответа подряд должны быть одинаковыми, а ответ за два дня до первого из двух одинаковых должен от них отличаться. Среди данных ответов нет двух одинаковых. Значит, гном должен ответить в седьмой день так, чтобы два ответа подряд были бы одинаковыми. То есть он должен сказать или Вова, или Дима. Но если он ответит «Вова», то, получится что за два дня до этого он так же сказал «Вова», чего быть не может. Значит, он скажет «Дима» и это будет правдой, а скажет это он в среду. Значит, Белоснежка начала спрашивать гнома в четверг.

Критерии:

- В пункте а) указано, что одно имя должно повторяться 2 раза подряд, и это или «Дима», или «Вова» и сказано, что это «Дима», то за пункт а) – 3 балла, а за пункт б) – по степени обоснования.
- В пункте а) указано, что одно имя должно повторяться 2 раза подряд, и это или «Дима», или «Вова» - 2 балла.
- «Голый» ответ « Дима» или «Дима» и «в четверг» – 1 балл.

№ 6. ***(7 баллов)*** Петя бегает в два раза быстрее, чем Вася, а Вася – в два раза быстрее, чем Толя. Готовясь к сдаче ГТО, ребята одновременно стартовали из одной точки кольцевой дорожки, причём Петя побежал в одну сторону, а Вася и Толя – в другую. Сначала Петя встретил Васю, а через 20 метров – Толю. Чему равна длина беговой дорожки?

Ответ: 150 м.

Решение. За то время, за которое Петя пробежал 20 метров, Толя пробежал в 4 раза меньше, т.е. 5 метров. Значит, в момент встречи Пети и Васи, между ними и Толем было 25 метров. Так как Вася бегает в два раза быстрее, чем Толя, то это расстояние равно расстоянию, которое на этот момент пробежал Толя. Значит, в момент встречи Пети и Васи, Вася пробежал 50 метров, а Петя – 100 метров. Вместе Петя и Вася пробежали всю беговую дорожку. Значит её длина 150 м.

Критерии:

- Полное решение с арифметической ошибкой – 6 баллов.
- Найдено, сколько метров пробежал каждый из ребят на момент встречи – 5 баллов.
- Найдено, сколько метров пробежали какие-нибудь два мальчика на момент встречи – 4 балла.
- Найдено расстояние между Толей и Петей в момент встречи – 2 балла.