

Зимний тур XXII Турнира Архимеда

Условия и решения задач

Задача 1. (2 балла) Ребус. Подберите вместо букв цифры так, чтобы равенство стало верным (вместо одинаковых букв – одинаковые цифры, а вместо разных букв – разные). *Все решения находить не требуется.*

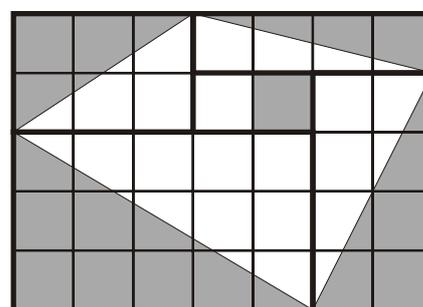
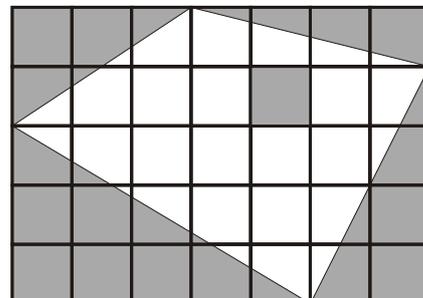
$$22 + \text{ТУРН} + \text{ИР} = 2013.$$

Ответы: 1938+53, 1956+35, 1965+26.

Решения: Можно доказать, что всего решений три, но от участников этого не требовалось.

Примечание:

Случай 1983+08 не является решением, т.к. 08 не является двузначным числом.



Задача 2. (3 балла) Имение маркиза Карабаса имеет форму прямоугольника (на рис). Часть участка занимает лес (выделен темным), остальное – пастбище. Чего у маркиза больше – леса или пастбищ? *Ответ объясните.*

Ответ: одинаково.

Решение:

1 способ. Дополним темные треугольники до прямоугольников равными треугольниками (см. рис.). Видно, что площадь светлых участков равна площади темных участков. Таким образом, леса и пастбищ у Маркиза поровну.

2 способ. Вычислим площадь темного участка.

1) Площадь прямоугольника: $5 \cdot 7 = 35$.

2) Вычтем площади темных треугольников и темного квадрата:

$$35 - \left(\frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{3 \cdot 5}{2} + \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{1 \cdot 4}{2} + 1 \right) = 17,5. \quad (\text{площади треугольников равны половине площадей соответствующих прямоугольников})$$

Задача 3. (5 баллов) На даче. Сразу после завтрака (в 8.00) папа и сын выходят за водой и начинают наполнять пустой бак. Папа приносит ведро через каждые 3 мин, а сын через каждые 4 мин. Как только вода попадает в бак, включается насос, который забирает воду для полива с постоянной скоростью 1 ведро за 12 мин. Укажите время, когда в баке окажется ровно 13 ведер воды.

Ответ. 8.27 (или через 27 минут).

Решение.

Через 24 минуты в баке будет $12 \frac{1}{4}$ ведер воды: папа принес 8 ведер воды, сын – 6 ведер воды и за 21

минуту насос выкачал $1 \frac{3}{4}$ ведра воды. Следующие три минуты из бака выльется $\frac{1}{4}$ ведра воды, а в конце 27 минуты папа нальет одно ведро и в баке впервые станет 13 ведер воды.

Примечание:

Наиболее распространенной ошибкой было утверждение, что через 12 минут (в 8.12) в баке стало 6 ведер, а через 24 минуты (в 8.24) – 12 ведер, хотя ответ при этом приводился верный. Заметим, что насос начинал работать только после того как в баке появлялась вода, т.е. через 3 минуты, а не с самого начала. Кроме этого насос работал непрерывно («с постоянной скоростью»). Поэтому ни через 12, ни через 24 минуты в баке не было целого числа ведер воды. За такие решения ставился 1 балл.

Задача 4. (5 баллов) У царя Гороха три сына: старший – Пётр, средний – Фёдор и младший – Иван-дурак. Царь хочет женить старшего сына на царевне Несмеяне. Известно, что два сына царя Гороха – рыцари (*всегда говорят правду*), а один – лжец (*всегда врёт*), но мало кто знает, кто из них кто. Царевна Несмеяна хочет выяснить, за кого (рыцаря или лжеца) ей предлагают выйти замуж. Может ли она это узнать, задав один вопрос Ивану? (*Иван-дурак умеет отвечать на вопросы только «да» или «нет»; кто рыцарь, а кто – лжец, ему известно*).

Ответ: может.

Решение.

Вариантов опроса могло быть несколько. Один из самых простых: «Верно ли, что Федор лжец?»

1. Иван ответит «да» в двух случаях: когда он и Петр рыцари, а Федор лжец, либо когда он лжец, Федор с Петром рыцари.

2. Иван ответит «нет» только в случаи, когда он и Федор рыцари, а Петр лжец.

Важно понимать, что возможно всего три случая. Составим таблицу:

Ответы Ивана:	ДА	ДА	НЕТ
Петр	Рыцарь	Рыцарь	Лжец
Федор	Лжец	Рыцарь	Рыцарь
Иван	Рыцарь	Лжец	Рыцарь

Таким образом, при ответе Ивана «нет» – Петр лжец, а при ответе «да» – Петр всегда рыцарь.

Аналогично будет рассматриваться и ситуация с вопросом: «Верно ли, что Федор рыцарь?»

Возможны и другие варианты вопросов. Например:

«Верно ли, что Вы с Петром рыцари?»; «Если бы я спросил тебя лжец ли Петр, ты бы сказал да?» и др.

Примечания:

1) За ответ «можно» баллы не давались.

2) Верный вопрос без пояснения – 2 балла

3) Верный вопрос с неполным пояснением (не рассмотрены все три случая) – 3 балла

0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Задача 5. (7 баллов) Числа в таблице. В таблицу 10×10 записаны числа от 0 до 99 (см. рисунок). Коля поставил перед некоторыми из них знак минус, но так, что в каждой строке и каждом столбце минус поставлен ровно у половины чисел. Затем он подсчитал сумму всех чисел в таблице. Какие числа у него могли получиться?

Ответ: 0.

Решение.

Каждое двузначное число представляет собой сумму десятков и единиц (см. рис.). Заметим, что сумма десятков всех чисел равна 0, потому что у всех чисел, стоящих в одном столбце одинаковое число десятков, а перед половиной чисел стоит знак минус. Аналогично, сумма единиц всех чисел равна 0, потому что у всех чисел в одной строке количество единиц одно и тоже, а перед половиной из них стоит знак минус. Следовательно, как не расставляй минусы в соответствии с условием задачи, сумма всех чисел будет равна 0.

Примечание:

Многие участники приводили лишь частный случай расположения плюсов и минусов, не доказывая, что данная сумма будет постоянной. За это давался только 1 балл.

00	10	20	30	40	50	60	70	80	90
01	11	21	31	41	51	61	71	81	91
02	12	22	32	42	52	62	72	82	92
03	13	23	33	43	53	63	73	83	93
04	14	24	34	44	54	64	74	84	94
05	15	25	35	45	55	65	75	85	95
06	16	26	36	46	56	66	76	86	96
07	17	27	37	47	57	67	77	87	97
08	18	28	38	48	58	68	78	88	98
09	19	29	39	49	59	69	79	89	99

Задача 6. (7 баллов) Два маляра Вася и Коля играют в игру: закрашивают клетки квадратной доски 4×4 . Первым ходит Вася, затем Коля, затем снова Вася и так далее, до тех пор, пока не окажется окрашенным какой-нибудь квадрат 2×2 . Кто закрасил последнюю клетку в таком квадрате, тот и проиграл. Кто из мальчиков сможет выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ: Коля.

Решение.

Обозначим клетки доски буквами как показано на рисунке. Стратегия Коли будет заключаться в следующем. После хода Васи (например, в клетку, обозначенную буквой А) Коля делает ход в клетку, обозначенную той же буквой.

A	B	C	D
E	F	G	H
A	B	C	D
E	F	G	H

Коля выиграет, т.к. если он своим ходом закрасит какой-нибудь квадрат 2×2 , то это будет означать, что Вася предыдущим ходом закрасил какой-нибудь квадрат 2×2 .

Примечание:

1) Если приводился только ответ и/или частный случай ходов Васи и Коли, то за это баллы не давались

2) Если приводился верный алгоритм ходов Коли без доказательства того, что он работает – 5 баллов