А. ОБРУБОВ, Ф. ПЧЕЛИНЦЕВ, Т. СТРУКОВ, П. ЧУЛКОВ, Е. НОВОДВОРСКАЯ,
Москва

XVIII Турнир Архимеда

Итоги заочного конкурса

Настало время подвести итоги традиционного заочного конкурса XVIII Турнира Архимеда. В 2008/09 учебном году в конкурсе приняло участие около 540 школьников из 57 регионов России, а также Республики Беларусь, Украины и Казахстана. Наибольшую активность проявили школьники из Москвы, Московской области, а также республик Татарстан и Башкортостан.

Победителями и призерами стали 37 участников. Лучший результат показал шестиклассник из школы № 20 г. Королёв Максим Кодрян. Отметим наличие (и не малое!) среди победителей и призеров учеников пятого и даже четвертого классов. Победителям и призерам конкурса высланы дипломы и призы — сборник задач и решений этого конкурса, а первым и вторым призерам также сборники, посвященные математическим регатам.

Каждый участник конкурса должен был получить письмо с результатами проверки. Если ответ не был получен, просьба написать по адресу: 121165, Москва, ул. Киевская, 24, редакция газеты «Математика», с пометкой на конверте «Турнир».

По независящим от авторов причинам в некоторых сборниках с итогами данного турнира может оказаться технический брак (отсутствие нескольких страниц или неправильный их порядок). Если к кому-то попадут такие брошюры, просьба сообщить об этом на электронную почту info@arhimedes.org — им будут высланы исправленные сборники.

Победители и призеры

Диплом I степени

Кодрян Максим (школа № 20, 6-й класс, г. Королёв, Московская обл.);

Николаева Дарья (школа № 464, 4-й класс, Москва);

Балашов Сергей (школа № 104, 7-й класс, Москва);

Габидуллина Алия (гимназия № 93, 7-й класс, г. Уфа, Республика Башкортостан);

Мусаткина Дарья (лицей № 3, 5-й класс, г. Чебоксары, Чувашская Республика).

Диплом II степени

Белоусова Александра (гимназия № 93, 7-й класс, г. Уфа, Республика Башкортостан);

Гайнцева Татьяна (гимназия № 93, 7-й класс, г. Уфа, Республика Башкортостан);

Цицилин Иван (лицей № 90, 6-й класс, г. Краснодар);

Бугаев Сергей (школа № 1978, 6-й класс, Москва);

Ишмаева Гузель (гимназия № 93, 7-й класс, г. Уфа, Республика Башкортостан);

Корнилова Анастасия (гимназия № 93, 6-й класс, г. Уфа, Республика Башкортостан);

Мельниченко Петр (школа № 315, 7-й класс, Москва);

Огнева Ирина (лицей № 15, 6-й класс, г. Саров, Нижегородская обл.);

Щевьёва Любовь (школа № 1189, 6-й класс, Москва);

Эльнатанов Алексей (школа № 1694, 6-й класс, Москва);

Немашкалов Алексей (лицей № 90, 6-й класс, г. Краснодар);

Суханов Евгений (гимназия № 42, 7-й класс, г. Барнаул, Алтайский край).

Диплом III степени

Кишко Ирина (Центр интеграции в мировое образовательное пространство, 7-й класс, г. Винница, Украина);

Купцов Евгений (лицей № 3, 5-й класс, г. Чебоксары, Чувашская Республика);

Мартыненко Николай (лицей математики и информатики, 7-й класс, г. Саратов);

Александров Никита (гимназия № 26, 7-й класс, г. Набережные Челны, Республика Татарстан);

Арцыман Илья (физико-математический лицей № 366, 7-й класс, г. Санкт-Петербург);

Веселов Сергей (Навлинская школа, 7-й класс, с. Навля, Орловская обл.);

Вотякова Мария (лицей № 3, 5-й класс, г. Чебоксары, Чувашская Республика);

Баженов Василий (школа № 5, 6-й класс, г. Магнитогорск, Челябинская обл.);

Безсуднова Ольга (гимназия № 1514, 7-й класс, Москва);

Бобров Дмитрий (информационно-экономическая гимназия № 27, 6-й класс, г. Минск, Республика Беларусь);

Вакказов Никита (школа № 42, 5-й класс, г. Уфа, Республика Башкортостан);

Дьяконова Полина (физико-математическая школа № 2007, 6-й класс, Москва);

Ковалёва Дарья (школа № 1020, 6-й класс, Москва);

Корнев Егор (физико-математическая школа № 5, 5-й класс, г. Долгопрудный, Московская обл.);

Курбатов Андрей (гимназия № 1514, 7-й класс, Москва);

Медведева Анна (школа № 1189, 7-й класс, Москва);

Огарок Петр (школа № 1189, 5-й класс, Москва);

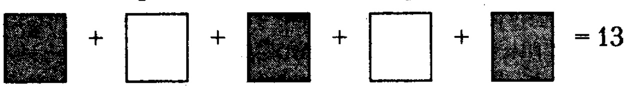
Одоевский Иван (лицей математики и информатики, 5-й класс, г. Саратов);

Рукавишникова Валерия (школа № 1199, 7-й класс, Москва);

Тутов Михаил (школа № 2, 6-й класс, г. Пушкино, Московская обл.).

Задачи и решения

1. Набор карточек. У Васи есть набор из 10 карточек с числами от 0 до 9. Он хочет вложить карточки в ячейки равенства так, чтобы числа в серых ячейках были одной четности, а числа в белых ячейках другой четности. Какие пять карточек он может выбрать? Укажите все варианты.



Ответ: Существует две комбинации карточек: 1, 3, 5, 4, 0 и 1, 3, 7, 2, 0.

Решение. Так как общая сумма нечетна, то в серых ячейках, могут быть только нечетные числа. Тогда в белых ячейках стоят четные числа. Рассмотрим случаи с наименьшими суммами нечетных чисел (все числа по условию используются только один раз):

1) $1 + 3 + 5 = 9$, следовательно, сумма чисел на белых карточка равна 4, откуда одно из них — 4, а другое — 0.

2) $1 + 3 + 7 = 11$, следовательно, сумма чисел на белых карточках равна 2, откуда одно из них — 2, а другое — 0.

3) $1 + 5 + 7 = 13$, следовательно, сумма чисел на белых карточках равна 0, но так как каждая цифра у Васи встречается только один раз, то такого быть не может.

Далее рассматривать случаи не нужно, так как в других комбинациях суммы нечетных чисел будут превышать 13.

Комментарий. Заметим, что около половины участников считают 0 числом с неопределенной четностью, что, конечно, неверно: 0 — четное число.

2. Найдите число. Если между цифрами некоторого двузначного числа вписать это же число, то полученное четырехзначное число будет больше первоначального в 77 раз. Найдите это число.

Ответ: 15.

Решение. Пусть $\overline{AB}$ — искомое число, и по условию $\overline{AABB} = 77 \cdot \overline{AB}$. Тогда

$$\overline{AABB} = 1000 \cdot A + 100 \cdot A + 10 \cdot B + B =$$
$$= 1100 \cdot A + 11 \cdot B = 11 \cdot (100 \cdot A + B) = 77 \cdot \overline{AB},$$
$$100 \cdot A + B = 70 \cdot A + 7 \cdot B,$$

откуда $30A = 6B$, или $B = 5A$. Так как A и B — цифры, то это могут быть только 1 и 5. Следовательно, искомое число — 15.

3. Прямоугольники. Есть прямоугольники вида 1×1, 1×2, ..., 1×2009.

а) Можно ли из них сложить прямоугольник со сторонами больше тысячи?

б) Можно ли из них сложить квадрат?

Ответ: а) да, б) нет.

Решение. а) Отложим пока прямоугольник 1×2009. Остальные составим парами следующим образом: $1 \times 1 + 1 \times 2008$, $1 \times 2 + 1 \times 2007$ и т.д. В итоге получим 1004 прямоугольника размером 1×2009. Сложим их последовательно сторонами, равными 2009, и прибавим к ним первый. Мы получили прямоугольник со сторонами 1005×2009.

б) Сторона квадрата не может быть меньше чем 2009. Посчитаем суммарную площадь всех прямоугольников: 1005×2009, что значительно меньше чем 2009^2. Откуда следует, что из них нельзя сложить квадрат.

4. Странный кузнечик прыгает по прямой: сначала 10 прыжков вправо — 2 прыжка влево, 10 прыжков вправо — 1 влево, затем цикл повторяется. Каждый прыжок кузнечика — 10 см.

а) На каком расстоянии от старта он окажется, сделав 1000 прыжков?

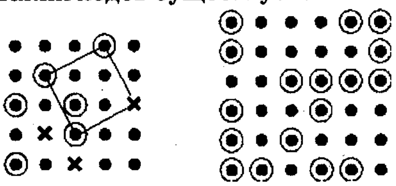
б) Сколько прыжков ему потребуется, чтобы оказаться на расстоянии 100 м вправо?

Ответ: а) 7400 см или 74 м; б) 1352 прыжка.

Решение. а) Один цикл прыжков кузнечика — 23 прыжка, при этом он перемещается на 170 см вправо. 1000 прыжков — 43 цикла + 11 прыжков, то есть $43 \cdot 170 + 90 = 7400$ см.

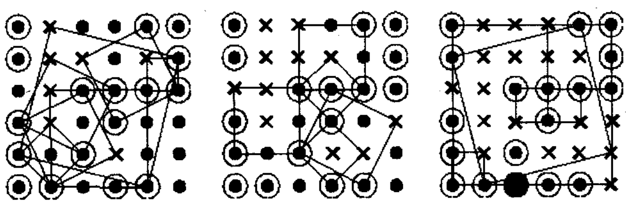
б) За один цикл кузнечик перемещается на 170 см. Ему необходимо переместиться на 10 000 см. Следовательно, ему необходимо повторить 58 раз цикл прыжков и еще преодолеть 140 см ($10\,000 = 170 \cdot 58 + 140$). Чтобы преодолеть 140 см кузнечику нужно совершить 18 прыжков. Таким образом, всего кузнечик совершит $23 \cdot 58 + 18 = 1352$ прыжка.

5. Точки и квадраты. В квадрате из точек двое по очереди обводят по одной точке. Проигрывает тот, кто обводит четвертую вершину квадрата, состоящего из обведенных точек. На первом рисунке крестиком отмечены точки, обведение которых будет означать проигрыш. На втором рисунке укажите ход, который не приведет к проигрышу. Сколько таких ходов существует?



Ответ: Это точка — третья слева в нижнем ряду. Такая точка ровно одна.

Решение. Последовательно покажем (см. рис.), какие ходы являются проигрышными:



Единственный возможный ход выделен серым цветом.

Комментарий. Отметим, что при указании в ответе нескольких ходов, за такие работы ставилось 0 баллов.

6. На острове рыцарей и лжецов. Чтобы попасть в пещеру с сокровищами на острове, населенном рыцарями и лжецами (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду), Али-Баба должен пройти испытание: угадать пароль — натуральное число от 1 до 200. Али-Баба знает, что местным жителям острова пароль известен. Случайно он подслушал разговор семи местных жителей (назовем их для краткости A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7), стоящих в очереди за шербетом.

Вот, что он услышал:

A_1: «Или A_3, или A_6 — лжец. А может быть, и оба».

A_2: «Одно из двух: я либо первый рыцарь в очереди, либо первый лжец».

A_3: «Требуемое число делится на порядковые номера всех лжецов в очереди».

A_4: «Я последний лжец, который высказывается сегодня».

A_5: «В очереди есть две пары стоящих друг за другом лжецов».

A_6: «Тот, кто стоит в очереди последним, — рыцарь».

A_7: «Сумма порядковых номеров всех рыцарей в очереди является делителем пароля».

Помогите Али-Бабе попасть в пещеру.

Ответ: пароль — 180.

Решение. Для начала необходимо определить, кто среди этих жителей лжец, а кто рыцарь.

A_4 не может быть рыцарем, так как рыцарь ни при каком условии не может сказать, что он лжец. Значит, A_4 — лжец. И тогда из ложности его утверждения следует, что после него тоже есть лжецы.

Кем бы ни был A_2 — рыцарем или лжецом, в любом случае из его утверждений следует, что A_1 — лжец. Значит, A_3 и A_6 — рыцари.

Тогда из утверждения A_6 следует, что A_7 — рыцарь.

Так как A_3 рыцарь, то искомое число делится на 4 и 1. Так как после A_4 должен стоять хотя бы один лжец, а A_6 и A_7 — рыцари, то A_5 — лжец.

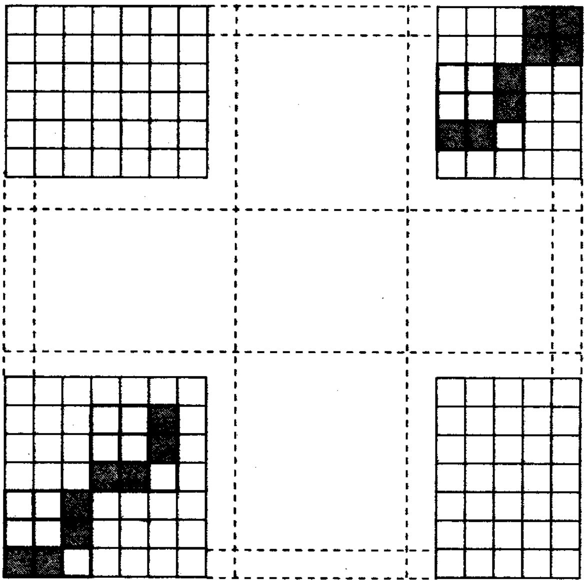
Так как A_5 лжец, то нет двух пар стоящих друг за другом лжецов. Одной из пар являются лжецы A_4 и A_5. Тогда A_2 может быть только рыцарем.

Из всего сказанного получаем, что искомое число делится на 1, 4, 5 и на $2 + 3 + 6 + 7 = 18$. НОК(4; 5; 18) равен 180. Это единственное число меньшее 200, подходящее в качестве пароля.

7. Доминошки. На шахматную доску размером 2009×2009 укладывают доминошки. Известно, что в любой строке и в любом столбце есть клетка, покрытая доминошной. Какое минимальное количество доминошек потребуется для этого?

Ответ: 1340 доминошек.

Решение. Начнем заполнять квадрат 2009×2009 доминошками начиная с левого нижнего угла. Первую доминошку положим горизонтально, она «закроет» две линии по вертикали и одну линию по горизонтали. Следующую доминошку положим вертикально, она «закроет» две линии по горизонтали и одну по вертикали. Всего этими двумя доминошками будет закрыто 3 линии по горизонтали и 3 линии по вертикали (см. рис.). Будем располагать такие же маленькие квадраты по диагонали большого квадрата — столько, сколько их поместится. Их будет 2009 : 3 = 669 (ост. 2).



Всего получится 669 квадратов, которые содержат $669 \cdot 2$ доминошек и закрывают все линии по вертикали и по горизонтали в квадрате 2007×2007. Квадрат 2×2, оставшийся незакрытым, закрывается двумя доминошками. Следовательно, всего потребуется $669 \cdot 2 + 2 = 1340$ доминошек.

8. Три кучки камней. Есть три кучки камней. За один шаг можно из одной кучки в другую перекладывать столько камней, сколько уже есть во второй. Всегда ли можно за конечное число шагов уравнять какие-нибудь две кучки?

Ответ: всегда можно.

Решение. Сначала рассмотрим только две кучки, при этом пусть в одной из них — четное число камней, а в другой — нечетное. Поскольку кучек только две, то существует только один возможный шаг: камни из большей кучки переложить в меньшую. Продолжим перекладывать камни таким образом. Поскольку число камней не бесконечно, то существует конечное число комбинаций камней в кучках. Фактически, как только одна из комбинаций оказалась у нас во второй раз, мы попали в исходное состояние (до перекладывания камней!). Это следует из того, что для любой комбинации камней в четной и нечетной кучках есть только одна (!) предшествующая комбинация. Предшествующая комбинация камней в кучах может быть получена перемещением половины камней из четной кучки в нечетную кучку.

Если такой цикл имеет длину n, то, сделав $n - 1$ шаг, мы достигаем состояния, предшествующего начальному. Так, если мы были в состоянии $(a; b)$, где a — четно и b — нечетно, то через $n - 1$ шаг мы получим состояние

$$\left(\frac{a}{2}; b+\frac{a}{2}\right).$$

Теперь рассмотрим более общий случай. Предположим, что в одной из кучек нечетное число камней, а в двух других — четное. Покажем, как увеличить число камней в нечетной кучке, сохранив четное число камней в двух других. Для нас будет важно, что в конечном счете одна из четных кучек должна опустошиться (то есть число камней в такой кучке станет равно 0). Пусть количество камней в кучках будет $(a; b; c)$, где a — нечетно, в то время как b и c — четно, причем число камней в одной из кучек, например b, кратно 4 (если вдруг окажется, что ни b, ни c не кратны 4, то сделаем один ход и переложим камни из одной кучки в другую).

Будем перекладывать камни между кучками a и b до предпоследнего шага цикла. Три кучки примут вид $\left(a+\frac{b}{2}; \frac{b}{2}; c\right)$. У нас осталась одна нечетная и две четных кучки, и мы увеличили число камней в нечетной кучке. Если повторять эту операцию дальше (меняя местами кучки b и c при необходимости), то одна из четных кучек должна рано или поздно опустошиться. Это следует из того, что число камней в четных кучках постепенно уменьшается, при этом число камней в этих кучках остается четным.

Заметим теперь, что пустая кучка может быть получена только из двух равных кучек. Значит, на каком-то шаге две кучки уравнялись. Назовем рассмотренный случай «нечетный-четный-четный» (по четности камней в кучках).

Осталось рассмотреть другие случаи. Они сводятся к уже рассмотренному.

«Нечетный-нечетный-нечетный» случай становится «нечетным-четным-четным» после того, как сделан 1 шаг.

В случае «четный-четный-четный» мы можем разбить камни в каждой кучке на пары и рассматривать каждую пару как один большой камень. Поскольку мы всегда должны перекладывать количество камней, равное числу камней в другой кучке, то от того, что мы сделали из маленьких камней большие, задача не изменится. Таким образом мы сможем объединять камни в пары до тех пор, пока не получим решенный случай или «четный-нечетный-нечетный» случай, который приводится к случаю «четный-четный-четный» в один шаг между нечетными кучками. Поскольку при объединении пары камней в большой камень общее число камней уменьшается и поскольку число камней конечно, то рано или поздно мы получим уже решенный случай.